



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

## TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Los cuaternios de Hamilton

Autor/es

ALAZNE URBIETA MURO

Director/es

JOSÉ MARÍA PÉREZ IZQUIERDO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



***Los cuaternios de Hamilton***, de ALAZNE URBIETA MURO  
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative  
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.  
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los  
titulares del copyright.



# **UNIVERSIDAD DE LA RIOJA**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**Los cuaternios de Hamilton**

Realizado por:

**Alazne Urbieto Muro**

Tutelado por:

**José María Pérez Izquierdo**

**Logroño, julio, 2020**



## Resumen

En este trabajo se estudian los cuaternios de Hamilton. En la primera parte se describe esta generalización de los números complejos mediante el proceso de duplicación Cayley-Dickson. Este proceso permite resolver el problema de la composición de formas cuadráticas.

Durante la segunda parte del trabajo, estudiaremos la representación de las rotaciones en el espacio mediante los cuaternios y los Ángulos de Euler. Llegando finalmente a la conclusión de que el uso de los cuaternios en dichas representaciones es mejor. También se mostrará cómo una generalización de los cuaternios, las álgebras de Clifford, permite extender la representación de rotaciones a dimensiones arbitrarias.

## Abstract

In this work we discuss Hamilton's algebra of quaternions. In the first part we describe this generalization of the complex numbers by means of the so called Cayley-Dickson doubling process. This approach leads to a solution for the problem of composition of quadratic forms.

In the second part we will study the representation of rotations on the usual three-dimensional euclidean space in terms of quaternions and Euler angles. In general, quaternions allow faster computation of composition of rotations. We will also present the extension of these ideas to arbitrary dimensions based on Clifford algebras, a generalization of Hamilton's quaternions.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Aritmética básica de los cuaternios . . . . .	7
1.2. Aritmética básica de los octoniones . . . . .	9
<b>2. Números y cuaternios</b>	<b>13</b>
2.1. Definición y ejemplos . . . . .	13
2.1.1. Proceso de duplicación de Cayley-Dickson . . . . .	16
2.1.2. Ejemplos de álgebras de composición . . . . .	19
2.2. Clasificación . . . . .	20
2.3. Formas cuadráticas que admiten composición . . . . .	24
<b>3. Rotaciones y cuaternios</b>	<b>27</b>
3.1. Codificando rotaciones en cuaternios . . . . .	27
3.1.1. Los cuaternios no nulos inducen isometrías en el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
3.1.2. Cuaternios distintos pueden inducir la misma isometría	28
3.1.3. Los cuaternios inducen rotaciones . . . . .	29
3.1.4. Composición de rotaciones usando cuaternios. Matriz coordinada . . . . .	30
3.2. Ángulos de Euler y de Tait-Bryan. Bloqueo del cardán . . . . .	32
3.2.1. Expresión matricial . . . . .	35
3.2.2. Cambio entre ángulos de Tait-Bryan y cuaternios . . . . .	36
3.3. Interpolación de rotaciones . . . . .	37
3.3.1. Exponencial y logaritmo de cuaternios . . . . .	37
3.3.2. Interpolación entre dos cuaternios de norma 1 . . . . .	39
3.3.3. Eficiencia . . . . .	40
3.4. Generalización a dimensiones superiores. . . . .	41
3.4.1. Álgebras de Clifford . . . . .	41
3.4.2. Reflexiones y rotaciones mediante álgebras de Clifford .	43
3.4.3. Grupos Pin y Spin . . . . .	45

3.4.4. Cuaternios como caso particular de rotaciones median- te Spin . . . . .	46
<b>4. Conclusiones</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introducción



Figura 1.1: W. R. Hamilton

William Rowan Hamilton pensó en construir un álgebra en tres dimensiones (álgebra de tripletes) extendiendo así el hecho de que los números complejos se podían tratar como pares de números reales. Los números complejos son de la forma  $a + bi$  y los tripletes que Hamilton quería construir debían ser de la forma  $a + bi + cj$ . Su objetivo era definir para ellos las operaciones aritméticas. La suma y la resta las definió de forma sencilla (componente a componente), pero para la multiplicación no tuvo la misma suerte ya que tras muchísimos intentos sus tripletes no tenían las propiedades deseadas.

El 16 de octubre de 1843, paseando en compañía de su mujer, se dio cuenta de que en realidad, esa álgebra de mayor tamaño que quería crear tenía que ser de cuatro dimensiones y no de tres como él había intentado hasta entonces. En aquel instante grabó la fórmula de los cuaternios  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  en una piedra del puente de Broom.

Los cuaternios proporcionaron el primer lenguaje natural para discutir el electromagnetismo. Tras la muerte de Hamilton, surgió una escuela de cuaternionistas en las Islas Británicas. Sin embargo, a mediados de 1880 hubo un gran cambio cuando Gibbs inventó el producto vectorial. Este hecho, trajo como consecuencia que los matemáticos de la época se posicionasen como cuaternionistas y anticuaternionistas.





Figura 1.2: Placa conmemorativa en el puente de Broom

Finalmente, sabiendo que el análisis vectorial facilitaba mucho el trabajo de los matemáticos y teniendo en cuenta que hoy en día el electromagnetismo se enseña utilizando métodos vectoriales puede parecer que los cuaternios perdieron la batalla frente al análisis vectorial. Pero nada más lejos de la realidad.

En la actualidad los cuaternios siguen siendo válidos ya que por ejemplo proporcionan un lenguaje natural para describir las rotaciones espaciales. También se utilizan en aplicaciones que van desde la aeronáutica y la robótica hasta los videojuegos.

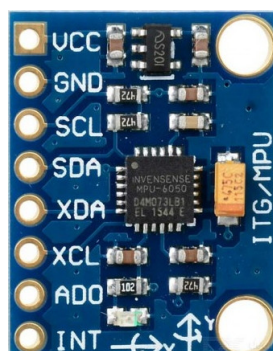


Figura 1.3: El giroscopio y acelerómetro MPU6050 puede expresar la posición relativa en términos de cuaternios.

## 1.1. Aritmética básica de los cuaternios

El álgebra de cuaternios  $\mathbb{H}$  es el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con base  $\{1, i, j, k\}$  con un producto asociativo que sigue las siguientes reglas de multiplicación establecidas por Hamilton

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

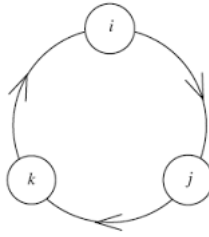
donde 1 es el elemento identidad.

Un cuaternio genérico tiene la forma

$$x = x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \quad (1.1)$$

con  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  números reales, pero también puede reescribirse como  $x = (x_1 1 + x_2 i) + (x_3 1 + x_4 i)j$ . El subespacio  $\mathbb{C} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i \subseteq \mathbb{H}$  es cerrado por el producto, y de hecho puede considerarse como una copia de los números complejos, lo que sugiere que Hamilton obtuvo los cuaternios basándose en la construcción de los números complejos a partir de los números reales. Ahora bien, también  $\mathbb{R}1 + \mathbb{R}j$  o  $\mathbb{R}1 + \mathbb{R}k$  pueden ser vistos de tal modo, por lo que  $\mathbb{H}$  contiene muchas (infinitas) copias de los números complejos. En cuanto a copias de los números reales, solamente contiene a  $\mathbb{R}1$ , por lo que en lugar de  $x_1 1$  simplemente escribiremos  $x_1$  en la expresión (1.1).

La multiplicación de los cuaternios queda expresada en este triángulo:



donde para calcular el producto de un elemento en un vértice por el elemento del vértice siguiente basta seguir las flechas. Por ejemplo  $jk = i$ . Si se multiplica en sentido contrario entonces hay que cambiar el signo. Por ejemplo  $kj = -i$ . En efecto, podemos comprobarlo usando las reglas dadas por Hamilton:

$$\begin{aligned} jk &= -i^2 jk = -i(ijk) = -i(-1) = i, \\ kj &= -(ijk)kj = -ijk^2j = ij^2 = -i. \end{aligned}$$

El *centro* de un álgebra asociativa  $A$  es el conjunto de elementos  $x$  tales que  $xy = yx$  para todo  $y \in A$ .

**Proposición 1.1.1.** *El centro de  $\mathbb{H}$  es  $\mathbb{R}1$ .*

*Demostración.* Escribimos  $x$  como  $x = \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  para ciertos  $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ . Imponiendo que  $xi = ix$  obtenemos que  $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$ . Imponiendo que  $xj = jx$  concluimos que  $x = \lambda_0 1$ .  $\square$

Asociado a cada cuaternio  $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$  encontramos su *conjugado*

$$\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k.$$

Puesto que  $ij + ji, ik + ki, \dots$  es nulo, es inmediato observar que si se define

$$n(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

entonces

$$x\bar{x} = \bar{x}x = n(x) \quad (1.2)$$

es un número real. También  $t(x) := x + \bar{x} = \bar{x} + x = 2x_1$  es un número real. Además,  $x^2 - t(x)x + n(x) = x(x - t(x)) + n(x) = x(-\bar{x}) + n(x) = 0$  implica

$$x^2 - t(x)x + n(x) = 0. \quad (1.3)$$

Puesto que  $n(x) = 0$  si y solamente si  $x = 0$  entonces todo cuaternio no nulo  $x$  posee inverso

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{n(x)} \quad (1.4)$$

Si  $x, y \in \{1, i, j, k\}$  es inmediato comprobar que  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ . Por ejemplo  $\overline{ij} = \bar{k} = -k = (-j)(-i) = \bar{j}\bar{i}$ . De este modo, y usando la propiedad distributiva, obtenemos que

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} \quad \forall x, y \in \mathbb{H}. \quad (1.5)$$

Otra interesante observación es que  $n(xy) = (xy)(\overline{xy}) = (xy)(\bar{y}\bar{x}) = x(y\bar{y})\bar{x} = n(y)x\bar{x} = n(x)n(y)$ , es decir

$$n(xy) = n(x)n(y). \quad (1.6)$$

Esta fórmula es interesante en sí misma ya que muestra que el producto de la suma de cuatro cuadrados es de nuevo una suma de cuatro cuadrados pues desarrollando el producto  $xy$  se tiene

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4)^2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_4 y_3 + x_3 y_4)^2 + \\ (x_3 y_1 + x_4 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_4)^2 + (x_4 y_1 + x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 \end{aligned}$$

## 1.2. Aritmética básica de los octoniones

El día después de descubrir los cuaternios Hamilton mandó una carta a su amigo John T. Graves contándole lo que había descubierto. Éste le contestó con otra describiendo una nueva generalización de los cuaternios, los *octoniones*. Al no publicarlo, Arthur Cayley lo hizo más adelante, por eso los octoniones son conocidos como números de Cayley. Hamilton luchó por demostrar que en realidad eran descubrimiento de su amigo pero todo fue en vano.

La multiplicación de los números complejos es conmutativa y asociativa, la de los cuaternios es asociativa pero no conmutativa y la de los octoniones no es ni asociativa ni conmutativa.

Los octoniones  $\mathbb{O}$  surgen cuando duplicamos los cuaternios usando otra raíz  $l$  de  $-1$ . Ahora tenemos siete unidades imaginarias independientes. Como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, los octoniones tienen una base

$$\{1, i, j, k, l, li, lj, lk\}$$

y por lo tanto son de la forma:

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k + x_5l + x_6li + x_7lj + x_8lk \text{ con } x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

La tabla multiplicativa de los octoniones queda codificada en el siguiente diagrama: La interpretación es similar al diagrama de los cuaternios. Cada

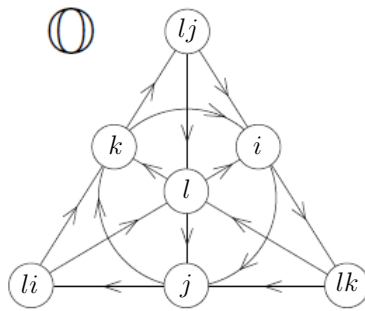


Figura 1.4: Multiplicación de octoniones basada en el Plano de Fano

tres elementos determinan una única línea dirigida (bien sea recta o circular). El producto de un elemento en una línea por el siguiente en la misma línea es el elemento que falta para completar la línea. Al cambiar el orden de

multiplicación debemos cambiar el signo del resultado. Por último, el cuadrado de cualquiera de los elementos de la base (excepto obviamente el 1) es  $-1$ .

Usando la notación  $I := li$ ,  $J := lj$  y  $K := lk$ , podemos escribir la tabla de multiplicación como sigue

	1	$i$	$j$	$k$	$l$	$I$	$J$	$K$
1	1	$i$	$j$	$k$	$l$	$I$	$J$	$K$
$i$	$i$	$-1$	$k$	$-j$	$-I$	$l$	$-K$	$J$
$j$	$j$	$-k$	$-1$	$i$	$-J$	$K$	$l$	$-I$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-1$	$-K$	$-J$	$I$	$l$
$l$	$l$	$I$	$J$	$K$	$-1$	$-i$	$-j$	$-k$
$I$	$I$	$-l$	$-K$	$J$	$i$	$-1$	$-k$	$j$
$J$	$J$	$K$	$-l$	$-I$	$j$	$k$	$-1$	$-i$
$K$	$K$	$-J$	$I$	$-l$	$k$	$-j$	$i$	$-1$

He remarcado la parte de la tabla correspondiente a  $1, i, j, k$  para que se vea que generan un subespacio cerrado por productos que es una copia de  $\mathbb{H}$ . De hecho, en el diagrama se vé muy bien que la parte del diagrama que solamente involucra a  $i, j, k$  es igual a la usada para los cuaternios. En realidad, por el mismo motivo, en el diagrama se ve perfectamente que el subespacio generado por el 1 y cualesquiera tres elementos de una misma línea es una copia de los cuaternios.

De igual modo que a cada cuaternio le queda asociado su conjugado, también así cada octonión  $x$  como en (1.7) tiene asociado un conjugado

$$x = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k - x_5l - x_6li - x_7lj - x_8lk$$

Si definimos

$$n(x) := x_1^2 + \cdots + x_8^2,$$

y  $t(x) := x + \bar{x}$ , por el mismo motivo que vimos para los cuaternios tendremos que

$$x\bar{x} = \bar{x}x = n(x), \bar{\bar{x}} = x \quad \text{y} \quad x^2 - t(x)x + n(x) = 0.$$

Un poco más complicado resulta el comprobar que también para los octoniones se cumple que

$$n(xy) = n(x)n(y).$$

El motivo es que en el caso de los cuaternios usamos que  $\mathbb{H}$  es un álgebra asociativa cuando observamos que  $n(xy) = (xy)(\bar{xy}) = (xy)(\bar{y}\bar{x}) = x(y\bar{y})\bar{x} = n(y)x\bar{x} = n(x)n(y)$ . Sin embargo, los octoniones no son asociativos

$$l(ij) = lk \quad \text{pero} \quad (li)j = -lk.$$

El tener la relación  $n(xy) = n(x)n(y)$  en este caso nos dice que el producto de dos sumas de ocho cuadrados de números enteros es de nuevo la suma de ocho cuadrados de números enteros. Así pues, una pregunta natural es

*¿Para qué valores de  $k$  es cierto que el producto de dos sumas de  $k$  cuadrados de números enteros es de nuevo una suma de  $k$  cuadrados de números enteros?*

Lo visto o conocido para números reales, complejos, cuaternios y octoniones nos permite dar una respuesta afirmativa para  $k = 1, 2, 4, 8$ . Pero, ¿hay otros valores posibles? En el siguiente capítulo mostraremos que no.



# Capítulo 2

## Números y cuaternios

Para la elaboración de este capítulo he seguido la referencia [1, 4].

### 2.1. Definición y ejemplos

Sea  $F$  un cuerpo y  $A$  un  $F$ -espacio vectorial de dimensión positiva. Una *forma bilineal simétrica* es una aplicación  $f : A \times A \rightarrow F$  tal que para todo  $x, x', y, y' \in A$  y  $\alpha, \beta \in F$  se cumple que  $f(x, y) = f(y, x)$  (simetría) y que

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta x', y) &= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y), \\ f(x, \alpha y + \beta y') &= \alpha f(x, y) + \beta f(x, y') \end{aligned}$$

(aquí, la segunda condición para la bilinealidad es redundante en vista de la simetría). Si el único  $a \in A$  que cumple  $f(a, x) = 0$  para todo  $x \in A$  es  $a = 0$  entonces se dice que la forma bilineal *no es degenerada*.

Una *forma cuadrática* sobre un  $F$ -espacio vectorial  $A$  es una aplicación  $n : A \rightarrow F$  tal que

$$(1) \quad n(\lambda x) = \lambda^2 n(x) \quad \forall \lambda \in F, x \in A \text{ y}$$

$$(2) \quad \text{la aplicación } f(x, y) := n(x + y) - n(x) - n(y) \text{ es una forma bilineal.}$$

Puesto que  $f(x, x) = n(2x) - n(x) - n(x) = 4n(x) - 2n(x) = 2n(x)$ , si el cuerpo base  $F$  tiene característica 2 entonces la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática es nula. Es decir, la forma bilineal no proporciona información acerca de la forma cuadrática. Sin embargo, si la característica es  $\neq 2$  entonces la forma cuadrática se puede recuperar a partir de la forma bilineal. Los cuerpos de característica 2 nos obligan a distinguir entre dos tipos de formas cuadrática.



**Definición 2.1.1.** *La forma cuadrática  $n(x)$  es estrictamente no degenerada si  $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$  es una forma bilineal simétrica no degenerada, es decir, si el único  $a$  que cumple  $f(a, x) = 0$  para todo  $x \in A$  es  $a = 0$ . Sin embargo, la forma cuadrática  $n(x)$  es no degenerada si el único  $a \in A$  que cumple  $n(a) = 0$  y  $f(a, x) = 0$  para todo  $x \in A$  es  $a = 0$ .*

Cada forma cuadrática estrictamente no degenerada es no degenerada y el recíproco es cierto si  $\text{car } F \neq 2$ , pero en general ambos conceptos no son equivalentes. Por ejemplo, para  $F = \mathbb{Z}_2$  y  $A = \mathbb{Z}_2$  la forma cuadrática  $n: A \rightarrow \mathbb{Z}_2$  dada por  $n(x) = x^2$  no es degenerada ya que el único  $a$  tal que  $f(a, x) = 0$  y  $n(a) = 0$  es  $a = 0$  pero sin embargo no es estrictamente no degenerada ya que cualquier  $a \in A$  cumple que  $f(a, x) = (a + x)^2 - a^2 - x^2 = 2ax = 0$ .

**Definición 2.1.2** (Álgebra de composición). *Un álgebra  $A$  con producto  $xy$  se dice de composición si existe una forma cuadrática estrictamente no degenerada  $n: A \rightarrow F$  que verifica que*

$$n(xy) = n(x)n(y).$$

Por lo expuesto en la introducción, es evidente que  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  son álgebras de composición, pero antes de seguir indagando en ellas conviene unificar la construcción de estas álgebras mediante un proceso de duplicación que nos permite entenderlas mejor. Veamos que algunas de las curiosas propiedades que hemos visto para  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  son en realidad comunes a cualquier álgebra de composición unitaria.

Conviene escribir la propiedad multiplicativa  $n(xy) = n(x)n(y)$  en términos de la forma bilineal asociada  $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ . Para ello observamos que  $f(xy, xy') = n(xy + xy') - n(xy) - n(xy') = n(x)n(y + y') - n(x)n(y) - n(x)n(y') = n(x)(n(y + y') - n(y) - n(y')) = n(x)f(y, y')$ . Es decir,

$$f(xy, xy') = n(x)f(y, y'). \quad (2.1)$$

Así, por ejemplo,  $f(y, y') = f(1y, 1y') = n(1)f(y, y')$  implica  $(n(1) - 1)f(y, y') = 0$ . Por la no degeneración estricta esto nos dice que

$$n(1) = 1.$$

A partir de esta relación observamos que  $f(xy, x'y') + f(x'y, xy') = f((x + x')y, (x + x')y') - f(xy, xy')f(x'y, x'y') = n(x + x')f(y, y') - n(x)f(y, y') - n(x')f(y, y') = f(x, x')f(y, y')$ . Por tanto,

$$f(xy, x'y') + f(x'y, xy') = f(x, x')f(y, y'). \quad (2.2)$$

Esta relación conduce a consecuencias muy importantes. Así por ejemplo tenemos que  $f(x(xy), 1z) + f(xy, xz) = f(x, 1)f(xy, z)$  implica que  $f(x(xy) - f(x, 1)xy + n(x)y, z) = 0$  para todo  $z$ , por lo que, debido a que  $n(\cdot)$  es estrictamente no degenerada,

$$x(xy) - f(x, 1)xy + n(x)y = 0. \quad (2.3)$$

Por supuesto, si evaluamos en  $y = 1$  obtendremos que

$$x^2 - f(x, 1)x + n(x) = 0 \quad (2.4)$$

o equivalentemente

$$x\bar{x} = \bar{x}x = n(x) \quad \text{donde} \quad \bar{x} := f(x, 1)1 - x \quad (2.5)$$

Es decir, al igual que les ocurre a  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ , la forma cuadrática  $n(x)$  se obtiene como  $x\bar{x}$  para la aplicación  $x \mapsto \bar{x} = f(x, 1)1 - x$ . Observamos también que  $\bar{1} = f(1, 1) - 1 = 2n(1) - 1 = 2 - 1 = 1$  y que  $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(f(1, x) - x, f(1, y) - y) = 2f(1, x)f(1, y) - f(1, x)f(1, y) - f(x, 1)f(1, y) + f(x, y) = f(x, y)$ . También  $\bar{\bar{x}} = f(1, x) - x = f(1, x)\bar{1} - \bar{x} = f(1, x) - (f(1, x) - x) = x$ . Es decir,

$$\bar{1} = 1, \quad f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y) \quad \text{y} \quad \bar{\bar{x}} = x. \quad (2.6)$$

Además, (2.3) implica  $x(xy) = f(x, 1)xy - n(x)y = (f(x, 1)x - n(x))y = x^2y$  y  $(x - f(x, 1)1)(xy) = n(x)y$ , es decir

$$x(xy) = x^2y, \quad \bar{x}(xy) = n(x)y = x(\bar{x}y). \quad (2.7)$$

Como ya hemos dicho,  $\mathbb{O}$  no es asociativa, así que estas identidades no son en absoluto triviales. Pero es que (2.2) tiene más consecuencias. Por ejemplo  $f(xy, z) = f(xy, 1z) = f(x, 1)f(y, z) - f(y, xz) = f(y, (f(x, 1) - x)z) = f(y, \bar{x}z)$ , es decir

$$f(xy, z) = f(y, \bar{x}z). \quad (2.8)$$

También, usando que  $\bar{x}x = n(x)$ ,  $\bar{x}y + \bar{y}x = (\overline{x+y})(x+y) - \bar{x}x - \bar{y}y = n(x+y) - n(x) - n(y) = f(x, y)$  implica que  $\bar{x}y + \bar{y}x = f(x, y)$ . Del mismo modo

$$f(x, y) = \bar{x}y + \bar{y}x = x\bar{y} + y\bar{x}. \quad (2.9)$$

Gracias a (2.8) la igualdad  $f(x, y) = \bar{x}y + \bar{y}x$  la podemos reescribir como  $\bar{y}x = f(1, \bar{x}y) - \bar{x}y = \overline{\bar{x}y}$ . Cambiando  $x$  por  $\bar{x}$  obtenemos

$$\overline{\bar{x}y} = \bar{y}\bar{x}. \quad (2.10)$$

El que la aplicación  $x \mapsto \bar{x}$  cambie el orden de los factores nos permite obtener nuevas relaciones a partir de las que ya teníamos. Por ejemplo,  $\overline{x(xy)} = \overline{x^2y}$

implica que  $(\bar{y}\bar{x})\bar{x} = \bar{y}\bar{x}^2$ . Cambiando  $x, y$  por  $\bar{x}, \bar{y}$  esto nos dice que  $(yx)x = yx^2$ . De igual modo obtendríamos

$$(yx)x = yx^2, \quad (yx)\bar{x} = n(x)y = (y\bar{x})x, \quad f(xy, z) = f(x, z\bar{y}). \quad (2.11)$$

Igualmente

$$(yx)x - f(x, 1)yx + n(x)y = 0. \quad (2.12)$$

### 2.1.1. Proceso de duplicación de Cayley-Dickson

**Definición 2.1.3.** Sea  $A$  un álgebra sobre un cuerpo  $F$  con elemento identidad y una involución<sup>1</sup>  $a \mapsto \bar{a}$  donde  $a + \bar{a}$  y  $a\bar{a} \in F$  para todo  $a \in A$ . Se considera  $A \times A$  con su suma componente a componente pero con el producto definido mediante

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2, \bar{a}_1a_4 + a_3a_2)$$

donde  $\alpha$  es un escalar no nulo de  $F$  fijo. El álgebra resultado de este proceso de duplicación (de Cayley-Dickson) se denota por  $(A, \alpha)$ .

El elemento  $(1, 0)$  es la identidad de  $(A, \alpha)$  y  $A' := \{(a, 0) \mid a \in A\}$  es una subálgebra que puede identificarse con  $A$ . Como espacio vectorial,  $(A, \alpha)$  es suma directa de los subespacios  $A'$  y  $(0, 1)A'$  ya que  $(0, 1)(a, 0) = (0, a)$ . Así pues,  $\dim(A, \alpha) = 2 \dim A$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Si  $A = \mathbb{R}$  con la involución identidad ( $x \mapsto x$ ) y  $\alpha = -1$  entonces

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 - a_4a_2, a_1a_4 + a_2a_3).$$

Así, la duplicación de  $\mathbb{R}$  con  $\alpha = -1$  proporciona  $\mathbb{C}$ .

Identificando  $A'$  con  $A$  mediante  $(a, 0) \leftrightarrow a$  y definiendo  $v := (0, 1)$ , los elementos del álgebra  $(A, \alpha)$  se pueden representar como  $x = a_1 + va_2$  con  $a_1, a_2 \in A$ . Con esta notación, que es más cómoda que usar pares, la multiplicación en  $(A, \alpha)$  viene dada por

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2). \quad (2.13)$$

Claramente  $v^2 = \alpha 1$ .

---

<sup>1</sup>Aplicación lineal que cumple  $\overline{\bar{x}y} = \bar{y}\bar{x}$  y  $\bar{\bar{x}} = x$ .

Asociado a  $x = a_1 + va_2$  se puede definir su conjugado

$$\bar{x} := \overline{a_1} - va_2$$

y, al igual que en  $A$  podemos definir la forma cuadrática  $n(a) = a\bar{a}$ , también así en  $(A, \alpha)$  disponemos de la forma cuadrática

$$n(x) = x\bar{x} = n(a_1) - \alpha n(a_2).$$

Ambas formas cuadráticas están muy ligadas. De hecho, la forma cuadrática de  $A$  coincide con la de  $(A, \alpha)$  cuando la restringimos a  $A$  ( $a_2 = 0$ ).

**Lema 2.1.1.** *La aplicación  $x \mapsto \bar{x}$  es una involución del álgebra  $(A, \alpha)$ . Además,  $x + \bar{x}, x\bar{x} \in F$  para todo  $x \in (A, \alpha)$ . La forma cuadrática  $n(a) = a\bar{a}$  es estrictamente no degenerada en  $A$  si y solamente si la forma cuadrática  $n(x) = x\bar{x}$  es estrictamente no degenerada en  $(A, \alpha)$ .*

*Demostración.* Es obvio que la aplicación  $x \mapsto \bar{x}$  es lineal y que  $\bar{\bar{x}} = x$  para todo  $x \in (A, \alpha)$ . Ahora, dados  $x = a_1 + va_2$  e  $y = a_3 + va_4$  tenemos

$$\begin{aligned} \bar{y}\bar{x} &= (\overline{a_3} - va_4)(\overline{a_1} - va_2) = (\overline{a_3} \overline{a_1} + \alpha a_2 \overline{a_4}) + v(-a_3 a_2 - \overline{a_1} a_4) \\ &= (\overline{a_3} \overline{a_1} + \alpha a_2 \overline{a_4}) - v(a_3 a_2 + \overline{a_1} a_4) = \overline{xy}, \end{aligned}$$

luego se trata de una involución.

Ahora pasamos a ver que  $x + \bar{x}, x\bar{x} \in F$  para todo  $x \in (A, \alpha)$ . Esto es consecuencia de que también se cumple para  $A$

$$x + \bar{x} = a_1 + \overline{a_1} \in F \quad \text{y} \quad x\bar{x} = a_1 \overline{a_1} - \alpha a_2 \overline{a_2} \in F$$

Vamos a probar ahora la última parte del lema. Observar que la involución de  $A$  coincide con la de  $(A, \alpha)$  cuando se aplica a elementos de  $A$ . Esto quiere decir que la forma cuadrática de  $A$  coincide con la de  $(A, \alpha)$  cuando se aplica a estos elementos. Así, si la forma cuadrática de  $(A, \alpha)$  es estrictamente no degenerada, también así la de  $A$ . Por tanto queda por demostrar el recíproco. Asumimos que la forma cuadrática  $n(a) = a\bar{a}$  es estrictamente no degenerada. Consideramos la forma bilineal

$$f(x, y) := x\bar{y} + y\bar{x} = (a_1 \overline{a_3} + a_3 \overline{a_1}) - \alpha(a_2 \overline{a_4} + a_4 \overline{a_2})$$

que corresponde con la forma cuadrática  $n(x) = x\bar{x}$  de  $(A, \alpha)$ .

Dado  $x = a_1 + va_2 \in (A, \alpha)$  tal que  $f(x, y) = 0$  para todo  $y \in (A, \alpha)$ , eligiendo  $y = a_3 \in A$  obtenemos que  $a_1 \overline{a_3} + a_3 \overline{a_1} = 0$  para todo  $a_3 \in A$ .

Teniendo en cuenta que la forma cuadrática  $n(a) = a\bar{a}$  no es degenerada, el único elemento ortogonal a los demás es el 0. Luego, esto nos lleva a que  $a_1 = 0$ .

Por otro lado, como  $\alpha \neq 0$ , un argumento similar con  $y := va_4$  conduce a  $\alpha(a_2\bar{a}_4 + a_4\bar{a}_2) = 0$  y así  $a_2$  también tiene que ser cero. Esto significa que la forma cuadrática  $n(x) = x\bar{x}$  es estrictamente no degenerada.  $\square$

**Lema 2.1.2.** *Si  $A$  es un álgebra de composición para  $n(a) = a\bar{a}$ , entonces  $(A, \alpha)$  es un álgebra de composición para  $n(x) = x\bar{x}$  si y solamente si el álgebra  $A$  es asociativa.*

*Demostración.* Como la forma cuadrática  $n(x) = x\bar{x}$  en  $(A, \alpha)$  es estrictamente no degenerada entonces  $(A, \alpha)$  será un álgebra de composición respecto a  $n(x) = x\bar{x}$  si y solamente  $n(xy) = n(x)n(y)$ .

Si  $x = a_1 + va_2$  y  $y = a_3 + va_4$  entonces  $n(x) = n(a_1) - \alpha n(a_2)$ . Tenemos que  $n(xy) - n(x)n(y) = n(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \alpha n(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) - [n(a_1) - \alpha n(a_2)][n(a_3) - \alpha n(a_4)]$ . Desarrollando obtenemos que

$$\begin{aligned} n(xy) - n(x)n(y) &= n(a_1a_3) + \alpha^2 n(a_4\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ &\quad - \alpha n(\bar{a}_1a_4) - \alpha n(a_3a_2) - \alpha f(a_1\bar{a}_4, a_3a_2) \\ &\quad - n(a_1)n(a_3) + \alpha n(a_1)n(a_4) + \alpha n(a_2)n(a_3) \\ &\quad - \alpha^2 n(a_2)n(a_4) \end{aligned}$$

que, como  $n(ab) = n(a)n(b)$  y  $n(\bar{a}) = n(a)$ , simplificando y usando (2.8) y (2.11) queda

$$\begin{aligned} n(xy) - n(x)n(y) &= \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2) \\ &= \alpha f(a_1a_3 \cdot a_2, a_4) - \alpha f(a_4, a_1 \cdot a_3a_2) \\ &= \alpha f(a_1a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3a_2, a_4). \end{aligned}$$

Por tanto,  $n(xy) = n(x)n(y)$  si y solamente si  $(a_1a_3)a_2 = a_1(a_3a_4)$ , es decir,  $(A, \alpha)$  es un álgebra de composición respecto de la forma cuadrática  $n(x) = x\bar{x}$  si y solamente si  $A$  es asociativa.  $\square$

Con vistas a obtener más y más álgebras de composición conviene entonces encontrar condiciones en  $A$  que hagan que  $(A, \alpha)$  sea asociativa. Obviamente  $A$  debe ser asociativa, pero no solo eso ya que

$$a_1(va_4) - (a_1v)a_4 = v(\bar{a}_1a_4 - a_4\bar{a}_1).$$

Por tanto, una condición necesaria sería que, cambiando  $a_1$  por  $\bar{a}_1$ ,  $a_1a_4 = a_4a_1$ . Es decir, para que  $(A, \alpha)$  sea asociativa es necesario que  $A$  sea conmutativa.

**Lema 2.1.3.** *El álgebra  $(A, \alpha)$  es asociativa si y solamente si  $A$  es asociativa y conmutativa.*

*Demostración.* Basta demostrar que las condiciones en  $A$  son suficientes, así que asumamos que  $A$  es asociativa y conmutativa. Realizando los cálculos tenemos que

$$\begin{aligned} (a_1 + va_2)(b_1 + vb_1) \cdot (c_1 + vc_2) &= (a_1b_1 + \alpha b_2\overline{a_2})c_1 + \alpha c_2\overline{(a_1b_1 + \alpha b_2\overline{a_2})} \\ &\quad + v \left( \overline{(a_1b_1 + \alpha b_2\overline{a_2})}c_2 + c_1(\overline{a_1}b_2 + b_1a_2) \right) \\ (a_1 + va_2) \cdot (b_1 + vb_1)(c_1 + vc_2) &= a_1(b_1c_1 + \alpha c_2\overline{b_2}) + \alpha(\overline{b_1}c_2 + c_1b_2)\overline{a_2} \\ &\quad + v \left( \overline{a_1}(\overline{b_1}c_2 + c_1b_2) + (b_1c_1 + \alpha c_2\overline{b_2})a_2 \right) \end{aligned}$$

Usando que  $A$  es asociativa y conmutativa y que  $a \mapsto \bar{a}$  es una involución podemos concluir que ambas expresiones son iguales y por lo tanto  $(A, \alpha)$  es asociativa.  $\square$

### 2.1.2. Ejemplos de álgebras de composición

Distinguimos cuatro tipos que generalizan a  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ .

- I. Cualquier cuerpo  $F$  de característica distinta de 2 es un álgebra de composición unitaria respecto de  $n(a) := a^2$ . En este caso, la forma bilineal asociada es  $f(a, b) = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$ , por lo que  $n(\cdot)$  es estrictamente no degenerada, y claramente  $n(ab) = n(a)n(b)$ . Así, al duplicar esta álgebra, como es conmutativa y asociativa, obtendremos también un álgebra de composición.
- II.  $\mathbf{K}(\mu) = F1 \oplus Fv_1$ , donde  $v_1^2 = v_1 + \mu$  y  $4\mu + 1 \neq 0$  y  $F$  es un cuerpo arbitrario (posiblemente de característica 2). Aquí no estamos considerando directamente  $(F, \alpha)$  porque aunque no existan álgebras de composición de dimensión 1 sobre cuerpos de característica 2, sí que existen de dimensión 2, y veremos que son exactamente las de la forma  $\mathbf{K}(\mu)$ . Pero por ahora debemos comprobar directamente que  $\mathbf{K}(\mu) = F1 + Fv_1$  es un álgebra de composición, la cual es obviamente conmutativa. Primero comprobamos que la aplicación

$$\overline{\alpha_0 + \alpha_1 v_1} := (\alpha_0 + \alpha_1) - \alpha_1 v_1$$

es una involución. En efecto,

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha_0 + \alpha_1 v_1)(\beta_0 + \beta_1 v_1)} &= \overline{(\alpha_0 \beta_0 + \mu \alpha_1 \beta_1) + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1) v_1} \\ &= (\alpha_0 \beta_0 + \mu \alpha_1 \beta_1 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1) - (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1) v_1 \\ &= \overline{(\beta_0 + \beta_1 v_1)} \cdot \overline{(\alpha_0 + \alpha_1 v_1)} \end{aligned}$$

La forma cuadrática que vamos a considerar es  $n(\alpha_0 + \alpha_1 v_1) = (\alpha_0 + \alpha_1 v_1)(\alpha_0 + \alpha_1 v_1) = \alpha_0^2 + \alpha_0 \alpha_1 - \mu \alpha_1^2$ . Puesto que  $n(x) = x\bar{x}$  entonces  $n(xy) = (xy)\overline{xy} = xy\bar{y}\bar{x} = n(y)x\bar{x} = n(x)n(y)$ . La forma bilineal asociada es  $f(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x}$ . Así que si  $f(x, y) = 0$  para todo  $y$  entonces  $x\bar{y} + y\bar{x} = 0$ . Con  $y = 1$  se tiene que  $x + \bar{x} = 0$ , por lo que  $0 = x\bar{y} + y\bar{x} = x(\bar{y} + y)$ . Con  $y = v_1$ , como  $\bar{v}_1 + v_1 = 1$  obtenemos que  $x = 0$ . Así,  $n(\cdot)$  es estrictamente no degenerada, y por tanto  $\mathbf{K}(\mu)$  es un álgebra de composición.

Debemos observar que si el cuerpo  $F$  no es de característica 2,  $v := v_1 - \frac{1}{2}$  satisface la ecuación  $v^2 = \alpha$  donde  $\alpha := \frac{1}{4}(a\mu + 1) \neq 0$  y podemos comprobar que  $\mathbf{K}(\mu) = (F, \alpha)$ . Recíprocamente, si  $\text{car } F \neq 2$  cualquier álgebra  $(F, \alpha)$  es del tipo II. Basta definir  $v_1 := v + \frac{1}{2}$  ya que  $v_1^2 = (v + \frac{1}{2})^2 = v^2 + v + \frac{1}{4} = \alpha + v + \frac{1}{4} = v_1 + (\alpha - \frac{1}{4})$ ; es más,  $4(\alpha - \frac{1}{4}) + 1 = 4\alpha \neq 0$ .

- III.  $\mathbf{Q}(\mu, \beta) = (\mathbf{K}(\mu), \beta)$  con  $\beta \neq 0$ . Puesto que  $\mathbf{K}(\mu)$  es asociativa y conmutativa entonces  $\mathbf{Q}(\mu, \beta)$  es un álgebra de composición asociativa, que se denomina *álgebra de cuaternios generalizados*. Es sencillo observar que los cuaternios generalizados no son conmutativos, por lo que su duplicación no va a ser asociativa.
- IV.  $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma) = (\mathbf{Q}(\mu, \beta), \gamma)$  con  $\gamma \neq 0$ . Esta álgebra no es asociativa, por lo que su duplicación no será ya un álgebra de composición. Nos referiremos a  $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)$  como álgebra de Cayley-Dickson o álgebra de octoniones generalizados.

Resulta cuando menos sorprendente que el proceso deje de dar álgebras de composición justamente a partir de los octoniones generalizados. Esto puede verse como una motivación para que la respuesta a la pregunta que nos hacíamos acerca de para qué valores de  $k$  el producto de dos sumas de  $k$  cuadrados es de nuevo una suma de  $k$  cuadrados sea  $k = 1, 2, 4, 8$ . Veremos más adelante que este es el caso, pero primero clasificaremos las álgebras de composición unitarias de dimensión finita.

## 2.2. Clasificación

A continuación demostraremos que todas las álgebras de composición unitarias son de uno de los tipos descritos en los ejemplos anteriores.

Sea  $A$  un álgebra de composición unitaria de dimensión finita,  $n(a)$  su correspondiente forma cuadrática multiplicativa y  $f(a, b)$  su forma bilineal

asociada. Por (2.10), la aplicación  $a \mapsto \bar{a} := f(1, a) - a$  es una involución,  $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$  y por (2.9)  $f(a, b) = a\bar{b} + b\bar{a}$ .

Si  $B$  es un subespacio de  $A$ , denotamos por  $B^\perp$  al subespacio ortogonal a  $B$  con respecto a la forma  $f(x, y)$ ,  $B^\perp := \{a \in A \mid f(a, B) = 0\}$ .

**Lema 2.2.1.** *Sea  $B$  una subálgebra de composición<sup>2</sup> de  $A$  que contiene al elemento identidad 1 del álgebra  $A$ . Entonces  $B^\perp B + BB^\perp \subseteq B^\perp$ , y para todo  $a, b \in B$  y  $v \in B^\perp$*

$$\bar{v} = -v, \quad av = v\bar{a} \quad (2.14)$$

$$a(vb) = v(\bar{a}b), \quad (vb)a = v(ab) \quad (2.15)$$

$$(va)(vb) = -n(v)b\bar{a} \quad (2.16)$$

*Demostración.* Sea  $v \in B^\perp$ . Como  $f(v, 1) = 0$  y  $f(a, v) = 0$  para todo  $a \in B$  entonces  $\bar{v} = -v$  y  $a\bar{v} + v\bar{a} = f(a, v) = 0$ . Esto prueba que  $\bar{v} = -v$  y que  $av = v\bar{a}$ .

Por (2.2)

$$f(a, vb) = f(a1, vb) = -f(ab, v) + f(a, v)f(1, b) = 0$$

así que  $B^\perp B \subseteq B^\perp$ . Del mismo modo,  $f(a, bv) = f(a, v\bar{b}) = 0$  implica que también  $BB^\perp \subseteq B^\perp$ .

Usando (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) &= (x + y) \cdot \overline{(x + y)z} - x(\bar{x}z) - y(\bar{y}z) \\ &= n(x + y)z - n(x)z - n(y)z \\ &= f(x, y)z \end{aligned}$$

Con  $x = a, y = v, z = b$  esta relación implica que  $a(\bar{v}b) + v(\bar{a}b) = f(a, v)b = 0$ . Como  $\bar{v} = -v$  entonces

$$a(vb) = v(\bar{a}b).$$

Al estar  $vb$  en  $B^\perp$ ,  $a(vb) = (vb)\bar{a}$ , así que, cambiando  $a$  por  $\bar{a}$  también tendremos que

$$(vb)a = v(ab).$$

Volviendo a usar que  $x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) = f(x, y)z$  pero esta vez con  $x = va, y = b, z = v$  y usando la primera igualdad en (2.11) y que  $n(v) = v\bar{v} = -v^2$ ,

$$(va)(vb) = (va)(\bar{b}v) = -b(\bar{v}a \cdot v) = b(\bar{a}v \cdot v) = b(-n(v)\bar{a}) = -n(v)b\bar{a}.$$

---

<sup>2</sup>Subespacio cerrado por el producto de modo que la restricción de la forma cuadrática es estrictamente no degenerada.



Con esta última fórmula llegamos a la última relación del enunciado, por lo que el lema queda probado.  $\square$

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $A$  un álgebra de composición unitaria. Se tiene que  $A$  es isomorfa<sup>3</sup> a una de las álgebras de los tipos (I-IV).*

*Demostración.* En esta demostración, el término *subálgebra* lo usaremos como sinónimo de subálgebra que contiene también al elemento identidad del álgebra. Puesto que  $a + \bar{a} \in F$ , con este convenio, toda subálgebra es automáticamente cerrada por la involución.

Dada  $B \neq A$  una subálgebra de dimensión finita de  $A$  de modo que la restricción de  $f(x, y)$  a  $B \times B$  no es degenerada,  $A$  se descomponen como suma directa de subespacios como  $A = B \oplus B^\perp$  con  $B^\perp \neq \{0\}$ . Así, podemos encontrar  $v \in B^\perp$  tal que  $\alpha := -n(v) \neq 0$ . Por el lema anterior, el subespacio  $vB$  está contenido en  $B^\perp$ , luego  $B \cap vB = \{0\}$ . Además,  $v(vb) = -n(v)b = \alpha b$  implica que la aplicación  $b \rightarrow vb$  de  $B$  en  $vB$  es inyectiva (y suprayectiva). Por tanto  $\dim vB = \dim B$  y el subespacio  $B_1 := B \oplus vB$  tiene el doble de dimensión que  $B$ .

Por (2.1) obtenemos que  $f(va, vb) = n(v)f(a, b) = -\alpha f(a, b)$  por lo que la restricción de la forma bilineal  $f(x, y)$  a  $vB$  no es degenerada. Como  $B_1$  es la suma ortogonal de  $B$  y  $vB$ , la restricción de  $f(x, y)$  a  $B_1$  no es degenerada. Ahora bien, las relaciones (2.15) y (2.16) nos dicen que  $B_1$  es subálgebra del álgebra  $A$  obtenida, salvo isomorfismo, a partir de  $B$  mediante  $\alpha$  por el proceso de Cayley-Dickson duplicando la subálgebra  $B$  las relaciones dicen que en  $B_1$

$$(a + va')(b + vb') = (ab + \alpha b'\bar{a}') + v(\bar{a}b' + ba')$$

La involución que le correspondería a  $(B, \alpha)$  por el proceso de Cayley-Dickson sería  $\overline{a + vb} = \bar{a} - vb$  que es exactamente la misma que la restricción de la involución de  $A$  a  $B_1$ . Así que  $B_1$  también es una subálgebra de  $A$  de dimensión finita y de modo que la restricción de  $f(x, y)$  a  $B_1$  no es degenerada.

Esta observación nos permite la siguiente estrategia. Partiendo de una subálgebra  $B$  como la anterior –veremos que en general existen– duplicamos para obtener  $B_1$ . Si  $B_1 \neq A$  entonces, como  $B_1$  cumple lo mismo que  $B$  podemos duplicarla para obtener una  $B_2$ , y así sucesivamente. Cada una de las subálgebras  $B_i$  será un álgebra de composición habrá sido obtenida, salvo isomorfismo, mediante el proceso de duplicación de Cayley-Dickson a

---

<sup>3</sup>Dos  $F$ -álgebras  $A$  y  $A'$  se dicen isomorfas si existe una aplicación lineal biyectiva  $f: A \rightarrow A'$  tal que  $f(xy) = f(x)f(y)$  para todo  $x, y \in A$ .

partir de la anterior. Ahora bien, en general el proceso al aplicarse más de tres veces puede no dar álgebras de composición, y esta va a ser la clave para poder concluir que  $A$  tiene dimensión finita y que es una de los tipos (I-IV).

Veamos cómo encontrar una subálgebra  $B$  adecuada. Separamos dos casos:

- (1)  $F$  cuerpo de característica distinta de 2:

En este caso,  $F$  es una subálgebra de  $A$  y  $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta f(1, 1) = 2\alpha\beta$  no es degenerada, por lo que podemos elegir  $B := F$ . Si  $F = A$  entonces  $A$  es de tipo (I). Si  $F \neq A$ , la construcción que hemos mencionado en los párrafos anteriores nos da una subálgebra  $B_1$  que será de tipo (II). Del mismo modo, si  $B_1 \neq A$ , tenemos otra subálgebra  $B_2$  de tipo (III). Finalmente, si  $B_2 \neq A$ ,  $A$  contiene una subálgebra  $B_3$  del tipo (IV). Este proceso debe finalizar aquí ya que, como hemos visto, la duplicación de un álgebra de tipo (III) no es un álgebra de composición por no ser asociativas las álgebras de tipo (III).

- (2)  $F$  cuerpo de característica 2:

Como  $\text{car } F = 2$  entonces  $A$  no puede tener dimensión 1 ya que en tal caso  $A$  coincidiría con  $F$  y la forma cuadrática sería obligatoriamente  $n(\alpha) = \alpha^2$  que no es estrictamente no degenerada. Así pues,  $\dim A \geq 2$ . Vamos a comprobar que  $A$  posee alguna subálgebra  $B$  del tipo (II), la cual usaremos de modo similar al caso anterior para concluir que  $A$  es de uno de los tipos (II-IV).

Veamos primero que existe  $a \in A \setminus F$  tal que  $f(a, 1) \neq 0$ . En efecto, si  $f(x, 1) = 0$  para todo  $x \in A \setminus F$ , como  $f(\lambda 1, 1) = \lambda f(1, 1) = \lambda 2 = 0$  entonces  $f(A, 1) = 0$ , lo que contradice la no degeneración de  $f$ . Elegimos ahora  $a \in A \setminus F1$  con  $t(a) := f(a, 1) \neq 0$  y  $v_1 := \frac{a}{t(a)}$ . Por lo tanto,  $t(v_1) = \frac{1}{t(a)}t(a) = 1$ , lo que usando (2.4) nos dice  $v_1^2 - v_1 + n(v_1) = 0$ . Es decir,  $v_1^2 = v_1 + \mu$  con  $\mu := -n(v_1) \in F$ . Al ser  $\text{car } F = 2$  entonces  $4\mu + 1 = 1 \neq 0$ . Queda demostrado que  $B := F1 \oplus Fv_1$  es una subálgebra de  $A$  de tipo (II). La involución que le corresponde como álgebra de tipo (II) viene dada por  $\alpha_0 + \alpha_1 v_1 \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_1 v_1$ . La que le corresponde a partir de la de  $A$  es  $\overline{\alpha_0 + \alpha_1 v} = \alpha_0 + \alpha_1 \overline{v_1} = \alpha_0 + \alpha_1(f(1, v_1) - v_1) = \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_1 v_1$ . Es decir, es la misma. En consecuencia la forma cuadrática (estrictamente no degenerada) que le corresponde como álgebra de tipo (II) coincide con la restricción de la de  $A$  a  $B$ . En particular,  $B$  es una subálgebra de dimensión 2 de tal modo que la restricción de  $f(x, y)$  a  $B \times B$  no es degenerada. Podemos

así utilizar el argumento empleado en el primer caso para concluir que  $A$  es de uno de los tipos (II-IV).

□

### 2.3. Formas cuadráticas que admiten composición

Dado un  $F$ -espacio vectorial  $A$ , se dice que una forma cuadrática  $n : A \rightarrow F$  admite composición si existe un *producto* que no necesariamente cumpla la propiedad asociativa o la conmutativa y que puede no poseer elemento identidad, pero que si que cumple la propiedad distributiva:

$$\begin{cases} (x + x')y = xy + x'y \\ x(y + y') = xy + xy' \\ \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \end{cases}$$

y tal que

$$n(xy) = n(x)n(y).$$

Luego,  $A$  será un álgebra de composición ya que  $A$  es un álgebra sobre  $F$  tal que existe  $n(x)$  forma cuadrática que cumple:

- $n(xy) = n(x)n(y)$ .
- $n(x)$  es estrictamente no degenerada.
- $A$  posee elemento identidad.

Estudiar si una forma cuadrática permite composición es una generalización del problema de si el producto de dos sumas de  $k$  cuadrados es de nuevo la suma de  $k$  cuadrados que se mencionó al final de la Introducción. La suma de  $k$  cuadrados se interpreta con  $n(x)$ . Así, el producto de dos sumas de  $k$  cuadrados se corresponde con  $n(x)n(y)$ , y buscamos alguna fórmula –un producto  $xy$ – de modo que  $n(x)n(y) = n(xy)$ .

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $n(x)$  una forma cuadrática estrictamente no degenerada sobre un  $F$  espacio vectorial de dimensión finita positiva  $A$ . Se tiene que  $n(x)$  admite composición si y solamente si  $n(x)$  es la forma cuadrática de algún álgebra de composición. Así, las únicas dimensiones posibles para el espacio  $A$  en que estas formas existen son 1, 2, 4 y 8.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ / Es inmediato (tomamos el producto de álgebra de composición  $n(x \cdot y) = n(x)n(y)$ )

$\Rightarrow$ / Sabemos que existe algún producto  $(\cdot) : A \times A \rightarrow A$  tal que  $n(x \cdot y) = n(x)n(y)$  pero no podemos asegurar que haya un elemento identidad. Buscamos un nuevo producto:

Deducimos por reducción al absurdo que existe un  $a \in A$  tal que  $n(a) \neq 0$ . Si no fuese así,  $n(x) = 0 \ \forall x$ . Por tanto,

$$\begin{cases} f(x + x', y) = n(x + y) - n(x) - n(y) = 0 \\ n(x) = 0 \end{cases}$$

Todos los elementos serían ortogonales con todos. Entonces como  $n(x)$  es estrictamente no degenerada (no existe un elemento no nulo que sea ortogonal a todos los demás),  $x = 0$ . Pero algún elemento es distinto de cero porque la dimensión de  $A$  es positiva.

Consideramos un elemento normalizado. Sea  $u := n(a)^{-1}a^2 = (\frac{a^2}{n(a)})$ . Claramente  $n(u) = n(n(a)^{-1}a^2) = (n(a)^{-1})^2 n(a^2) = \frac{1}{n(a)^2} n(a)n(a) = 1$  por lo que  $u$  es un elemento normalizado (norma igual a 1).

Procedemos al *cambio del producto*. En primer lugar comprobamos que  $f(xu, yu) = f(x, y) = f(ux, uy)$ . Teniendo en cuenta las relaciones vistas antes y que  $n(u) = 1$

$$\begin{aligned} f(xu, yu) &= n(xu + yu) - n(xu) - n(yu) = n((x + y)u) - n(xu) - n(yu) \\ &= n(x + y) - n(x) - n(y) = f(x, y) \end{aligned}$$

Sean  $R_u : x \rightarrow xu$  y  $L_u : x \rightarrow ux$  los operadores de multiplicación por  $u$ . Se trata de aplicaciones lineales biyectivas ya que  $\ker R_u = \{x \in A \mid xu = 0\} = \{0\}$  (inyectiva) implica que la dimensión de la imagen de  $A$  es  $\dim A$  (suprayectiva). Al ser biyectivas tienen inversas y  $f(R_u^{-1}(x), R_u^{-1}(y)) = f(x, y) = f(L_u^{-1}(x), L_u^{-1}(y))$  ya que por ejemplo  $f(xu, yu) = f(x, y) = f(ux, uy)$  tenemos que

$$f(R_u^{-1}(x), R_u^{-1}(y)) = f(R_u R_u^{-1}(x), R_u R_u^{-1}(y)) = f(x, y)$$

Teniendo en cuenta todo esto vamos a definir el nuevo producto que usaremos.  $x \cdot y = R_u^{-1}(x) \cdot L_u^{-1}(y)$  con  $n(xy) = n(x)n(y)$  y viendo que existe un elemento identidad. A continuación probaremos esto último.

Claramente

$$\begin{aligned}
 uu \cdot y &= R_u^{-1}(uu) \cdot L_u^{-1}(y) = R_u^{-1}(R_u(u)) \cdot L_u^{-1}(y) = uL_u^{-1}(y) \\
 &= L_u L_u^{-1}(y) = y \\
 x \cdot uu &= R_u^{-1}(x) \cdot L_u^{-1}(uu) = R_u^{-1}(x) \cdot L_u(L_u^{-1}(u)) = R_u^{-1}(x)u \\
 &= R_u R_u^{-1}(x) = x \\
 n(x \cdot y) &= n(R_u^{-1}(x)L_u^{-1}(y)) = n(R_u^{-1}(x))n(L_u^{-1}(y)) = n(x)n(y)
 \end{aligned}$$

ya que  $n(xu) = n(x)\forall x$ . Por tanto, este nuevo producto es válido y obtenemos un álgebra de composición.  $\square$

# Capítulo 3

## Rotaciones y cuaternios

Para la elaboración de este capítulo he seguido las referencias [2, 3]

### 3.1. Codificando rotaciones en cuaternios

Al igual que en la asignatura *Estructuras algebraicas*, la relación de conjugación es un concepto muy importante en el estudio de grupos, del mismo modo también aquí la aplicación adjunta, que asocia a cada elemento su conjugado por otro, va a tener un papel fundamental.

#### 3.1.1. Los cuaternios no nulos inducen isometrías en el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^3$

La adjunta por  $0 \neq x \in \mathbb{H}$  se define como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \text{Ad}_x: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ y &\mapsto xyx^{-1} \end{aligned}$$

Puesto que  $n(xy) = n(x)n(y)$ , lo primero que observamos es que

$$n(\text{Ad}_x(y)) = n(y)$$

por lo que  $\text{Ad}_x$  podemos verlo como una isometría<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^4$ . Sin embargo, nuestro interés es en rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ . Denotaremos por  $\mathbb{H}_0$  el conjunto  $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$  de cuaternios de traza cero (i.e. los  $y \in \mathbb{H}$  tales que  $\bar{y} = -y$  o equivalentemente  $f(y, 1) = 0$ ).

---

<sup>1</sup>El espacio euclídeo  $\mathbb{H}$  tiene norma  $\|x\| = \sqrt{n(x)}$  y producto escalar  $\frac{1}{2}f(x, y)$ . Nos restringiremos a  $\mathbb{H}_0$  que tiene base ortonormada  $\{i, j, k\}$ .

**Lema 3.1.1.** *Para cualquier  $x \in \mathbb{H}$  no nulo se tiene que  $\text{Ad}_x(\mathbb{H}_0) = \mathbb{H}_0$ .*

*Demostración.* En efecto,

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{H}_0 &\Leftrightarrow f(y, 1) = 0 \Leftrightarrow f(xy x^{-1}, x x^{-1}) = 0 \Leftrightarrow f(\text{Ad}_x(y), 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ad}_x(y) \in \mathbb{H}_0. \end{aligned}$$

□

De este modo, por restricción,  $\text{Ad}_x$  induce una isometría en el espacio euclídeo 3-dimensional  $(\mathbb{H}_0, n)$ . Identificando  $(\mathbb{H}_0, n)$  con el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  usual, es esta isometría la que estudiaremos.

### 3.1.2. Cuaternios distintos pueden inducir la misma isometría

Antes de seguir es importante observar que cuaternios diferentes pueden inducir la misma isometría. De hecho, si  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  entonces

$$\text{Ad}_{\lambda x}(y) = (\lambda x)y(\lambda x)^{-1} = \lambda \lambda^{-1} x y x^{-1} = x y x^{-1} = \text{Ad}_x(y)$$

Es decir,  $x$  y  $\lambda x$  inducen la misma isometría. Y este es esencialmente el único caso en que este fenómeno aparece.

**Lema 3.1.2.** *Si  $x y x^{-1} = z y z^{-1}$  para todo  $y \in \mathbb{H}_0$  entonces existe  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  de modo que  $z = \lambda x$ .*

*Demostración.* En efecto, la hipótesis implica que  $(x^{-1}z)y = y(x^{-1}z)$  para todo  $y \in \mathbb{H}_0$ , y por lo tanto para todo  $y \in \mathbb{H}$ . Así pues,  $x^{-1}z$  pertenece al centro de  $\mathbb{H}$ , que, por la Proposición 1.1.1 es  $\mathbb{R}1$ . Por tanto  $z = \lambda x$  para algún  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ . □

Esta indefinición tiene también ventajas. En lugar de  $x$  podemos usar

$$\frac{x}{\sqrt{n(x)}}$$

pues ambos cuaternios representan la misma isometría. La ventaja del segundo es que tiene norma 1

$$n\left(\frac{x}{\sqrt{n(x)}}\right) = \frac{n(x)}{n(x)} = 1.$$

Usando cuaternios de norma 1 todavía prevalece la indefinición de la que hablamos ya que  $x$  y  $-x$  determinan la misma isometría, pero este es el único caso.

### 3.1.3. Los cuaternios inducen rotaciones

**Lema 3.1.3.** *Sea  $x \in \mathbb{H}$  con  $n(x) = 1$ . Si  $x \neq \pm 1$  entonces existen únicos  $\alpha \in (0, \pi)$  y  $u \in \mathbb{H}_0$ ,  $n(u) = 1$  tales que*

$$x = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)u$$

*Demostración.* Podemos escribir  $x$  como  $x = \lambda_0 + x_0$  donde  $\lambda_0 \in \mathbb{R}1$  y  $0 \neq x_0 \in \mathbb{H}_0$ . Así,  $x_0 = \lambda_1 u$  para algún  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 > 0$  y algún  $u \in \mathbb{H}_0$  con  $n(u) = 1$ . Por tanto  $x = \lambda_0 + \lambda_1 u$  con  $1 = n(x) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2$ . Esto implica que existe algún ángulo  $\alpha \in [0, \pi)$  de modo que  $\lambda_0 = \cos(\alpha)$  y  $\lambda_1 = \sin(\alpha)$ , lo que prueba que  $x = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)u$ . La unicidad de esta expresión es sencilla. Basta considerar la componente en 1 para ver que  $\alpha$  queda unívocamente determinado por  $x$ . Mirando entonces la componente en  $\mathbb{H}_0$  vemos que  $u$  también lo está.  $\square$

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $x = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)u$  como en el lema anterior. Se tiene que  $\text{Ad}_x$  es una rotación de ángulo  $2\alpha$  y eje con vector director  $u$ . El sentido de la rotación es de acuerdo a la regla de la mano derecha siguiendo la dirección positiva de  $u$ .*

*Demostración.* Para probar que  $\text{Ad}_x$  es una rotación basta calcular qué elementos quedan fijos por ella. Observamos que  $xyx^{-1} = y$  si y solamente si  $xy = yx$ . Esto equivale a que  $y \in (\mathbb{R}1 + \mathbb{R}u) \cap \mathbb{H}_0 = \mathbb{R}u$ . Por tanto,  $\text{Ad}_x$  solamente deja fija a la recta  $\mathbb{R}u$ . Esto prueba que se trata de una rotación y que  $\mathbb{R}u$  es su eje de rotación.

Para calcular el ángulo de la rotación consideramos  $v \in \mathbb{H}_0$  de norma 1 perpendicular a  $u$ . El coseno del ángulo entre  $v$  y  $\text{Ad}_x(v)$  es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(v, \text{Ad}_x(v)) &= \frac{1}{2}f(vx, xv) = \frac{1}{2}f(\cos(\alpha)v - \sin(\alpha)uv, \cos(\alpha)v + \sin(\alpha)uv) \\ &= \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Por tanto el ángulo de la rotación  $\text{Ad}_x$  es  $2\alpha$ . De hecho podemos calcular  $\text{Ad}_x(v)$  como  $\cos(2\alpha)v + \sin(2\alpha)uv$ . Puesto que  $uv$  se corresponde con el producto vectorial de  $u$  y  $v$  (por ser  $u, v \in \mathbb{H}_0$  perpendiculares entre sí<sup>2</sup>) entonces el giro es en el sentido establecido en el enunciado.  $\square$

**Corolario 3.1.1.** *Sea  $\beta \in [0, 2\pi)$  un ángulo y  $u \in \mathbb{H}_0$  un vector de norma 1. La rotación de ángulo  $\beta$  y eje  $\mathbb{R}u$  de acuerdo a la regla de la mano derecha siguiendo la dirección positiva de  $u$  se obtiene como  $\text{Ad}_x$  para el cuaternio*

$$x = \cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)u.$$

---

<sup>2</sup>Observar que  $ij = k, jk = i, \dots$  tal y como ocurre con el producto vectorial.



**Ejemplo 3.1.1.** Consideremos la base  $\{i, j, k\}$ . Una rotación de 90 grados con respecto al eje  $i$  según la regla de la mano derecha fijaría a  $i$ , enviaría  $j$  a  $k$  y  $k$  a  $-j$ . Comprobémoslo. Puesto que el ángulo  $\beta$  es  $\pi/2$  entonces el cuaternio que describe la rotación es

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} xjx^{-1} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)j\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{2}(j+k)(1-i) \\ &= \frac{1}{2}(j+k+k-j) = k \\ xkx^{-1} &= \frac{1}{2}(1+i)k(1-i) = \frac{1}{2}(k-j)(1-i) = -j \\ xix^{-1} &= \frac{1}{2}(1+i)i(1-i) = \frac{1}{2}(i-1)(1-i) = i \end{aligned}$$

Supongamos ahora que deseamos hacer rotaciones de 120 grados según el eje  $i+j+k$ , que por simetría permuta cíclicamente  $i$ ,  $j$  y  $k$ . El cuaternio asociado a esta rotación es

$$x = \cos(\pi/3) + \sin(\pi/3)\frac{i+j+k}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$$

ya que hemos de utilizar un vector de norma 1 para describir el eje. Ahora,

$$\begin{aligned} xix^{-1} &= \frac{1}{4}(1+i+j+k)i(1-i-j-k) \\ &= \frac{1}{4}(-1+i+j-k)(1-i-j-k) = j \\ xjx^{-1} &= \frac{1}{4}(-1-i+j+k)(1-i-j-k) = k \\ xkx^{-1} &= \frac{1}{4}(-1+i-j+k)(1-i-j-k) = i \end{aligned}$$

Así, es muy sencillo construir rotaciones y operar con ellas.

### 3.1.4. Composición de rotaciones usando cuaternios. Matriz coordenada

Dados  $x, y, a \in \mathbb{H}$ , con  $x, y \neq 0$ , claramente

$$\text{Ad}_{xy}(a) = (xy)a(xy)^{-1} = \text{Ad}_x \text{Ad}_y(a)$$

por lo que el cuaternio que representa la composición de rotaciones  $\text{Ad}_x \text{Ad}_y$  en  $\mathbb{H}_0$  es  $xy$ . Es decir, el producto de cuaternios codifica el ángulo y el eje de giro resultante de componer dos rotaciones.

**Ejemplo 3.1.2.** *La composición de una rotación de 90 grados de eje  $i$  seguida de una de 90 grados de eje  $j$  realiza las permutaciones  $(i, j, k) \rightarrow (i, k, -j) \rightarrow (-k, i, -j)$ . En términos de cuaternios tenemos*

$$x = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{1}{2}(1 + i + j - k).$$

Por tanto el ángulo  $2\alpha$  de la rotación resultante cumple que  $\cos(\alpha) = 1/2$ ; es decir, es una rotación de 120 grados y el eje de la rotación tiene vector director  $i+j-k$  (aquí no lo hemos normalizado). Comprobamos que efectivamente es así.

$$\begin{aligned} xix^{-1} &= \frac{1}{4}(1 + i + j - k)i(1 - i - j + k) \\ &= \frac{1}{4}(-1 + i - j - k)(1 - i - j + k) = -k \\ xjx^{-1} &= \frac{1}{4}(-1 + i + j + k)(1 - i - j + k) = i \\ kx^{-1} &= \frac{1}{4}(1 + i - j + k)(1 - i - j + k) = -j \end{aligned}$$

De este modo, la composición de rotaciones se vuelve un problema muy trivial.

Si  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ , la matriz coordenada de la aplicación  $a \mapsto xa\bar{x}$  respecto de la base  $\{i, j, k\}$  es

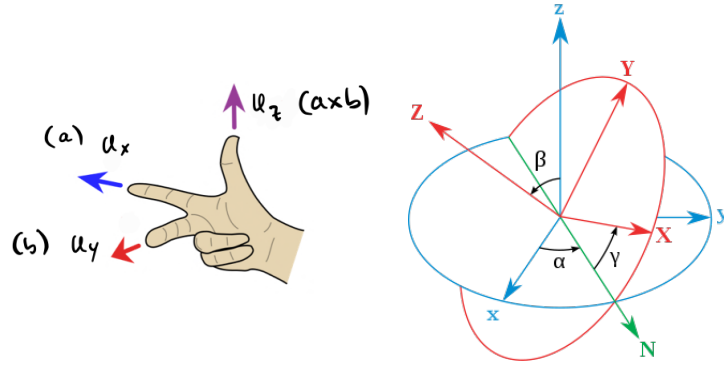
$$\begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 - 2x_0x_3 & 2x_0x_2 + 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 + 2x_0x_3 & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & -2x_0x_1 + 2x_2x_3 \\ -2x_0x_2 + 2x_1x_3 & 2x_0x_1 + 2x_2x_3 & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

la cual, dividida por el escalar  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  proporciona la matriz coordenada de la rotación  $\text{Ad}_x$ . Si asumimos que  $n(x) = 1$  entonces la matriz coordenada de la rotación  $\text{Ad}_x$  queda

$$\begin{pmatrix} 1 - 2x_2^2 - 2x_3^2 & 2x_1x_2 - 2x_0x_3 & 2x_0x_2 + 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 + 2x_0x_3 & 1 - 2x_1^2 - 2x_3^2 & -2x_0x_1 + 2x_2x_3 \\ -2x_0x_2 + 2x_1x_3 & 2x_0x_1 + 2x_2x_3 & 1 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \end{pmatrix}$$

### 3.2. Ángulos de Euler y de Tait-Bryan. Bloqueo del cardán

Hemos visto que cualquier rotación de  $\mathbb{R}^3$  puede ser codificada en un cuaternio de norma 1 (dos de hecho). Cualquier rotación también puede ser factorizada en términos de varias rotaciones más elementales. Conviene para ello primero observar que una rotación de  $\mathbb{R}^3$  queda determinada por la imagen de los vectores de una base ortonormada mediante la rotación. El resultado será otra base ortonormada. Conviene orientar las bases pues las rotaciones son movimientos directos que no cambian la orientación. Así, para una base ortonormada  $(u_x, u_y, u_z)$  que determina unos ejes coordenados  $x, y, z$ , en el plano  $xy$  visto desde el semiespacio  $z > 0$  el ángulo de  $u_x$  a  $u_y$  es  $\pi/2$  y el vector  $u_z$  normal al plano  $xy$  está unívocamente determinado por la regla de la mano derecha



En la figura la base ortonormada original es la base indicada por  $(u_x, u_y, u_z)$  en color azul. La base tras la rotación es la indicada por  $(u_X, u_Y, u_Z)$  en rojo. Es muy ilustrativo ver las áreas delimitadas por las circunferencias azul y roja como si fuesen discos. El disco azul en el plano  $xy$  y el disco rojo en el  $XY$ .

Vamos a describir los pasos para cambiar una base por otra. Asumiremos que el eje  $z$  no coincide con el  $Z$ , por lo que los discos no coinciden.

1. Primero calculamos la *línea de nodos*, que es la intersección de ambos discos. Por tanto es una línea perpendicular a los ejes  $z$  y  $Z$ . Elegimos como vector director el producto vectorial  $u_N := u_z \times u_Z$ . Mediante una rotación  $R_{\alpha, z}$  de un cierto ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$  y eje  $z$  el vector  $u_x$  pasará a ser  $u_N$ . Así, tras esta rotación  $(u_x, u_y, u_z)$  pasa a  $(u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}) := (u_N, u_{y'}, u_z)$ , donde el eje  $y'$  no es necesario detallarlo.

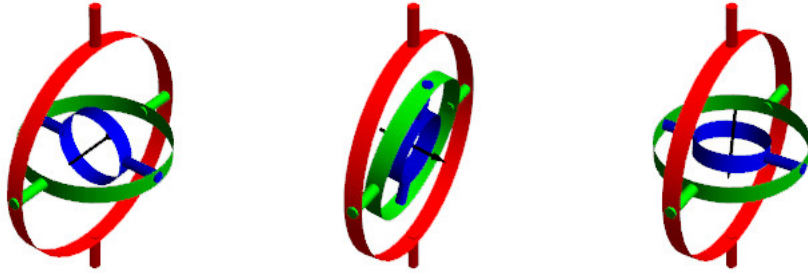
### 3.2. ÁNGULOS DE EULER Y DE TAIT-BRYAN. BLOQUEO DEL CARDÁN<sup>33</sup>

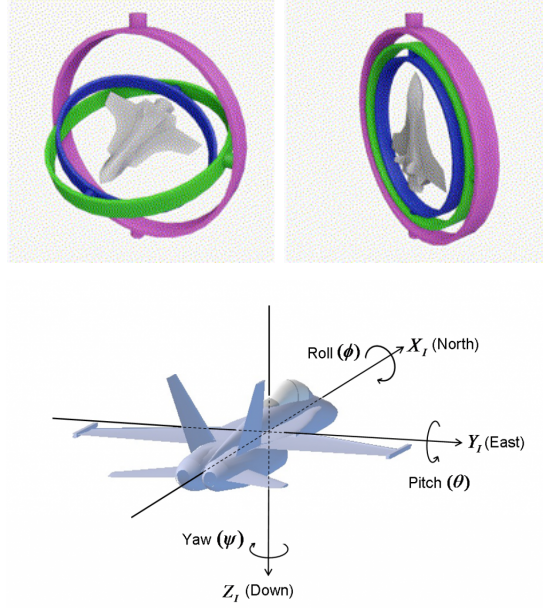
2. Ahora vamos a hacer coincidir ambos discos. Como  $u_N = u_z \times u_Z$  podemos realizar una rotación  $R_{\beta, x'}$  de ángulo  $\beta \in (0, \pi)$  ( $z$  y  $Z$  son diferentes) y eje la línea de nodos para llevar  $u_z$  hasta el eje  $u_Z$ . Como consecuencia, tras esta rotación el disco azul pasará a coincidir con el rojo. La base  $(u_{x'}, u_{y'}, u_{z'})$  pasa a  $(u_{x''}, u_{y''}, u_{z''}) := (u_N, u_{y''}, u_Z)$  para un cierto eje  $y''$ .
3. Finalmente podemos hacer una rotación  $R_{\gamma, z''}$  de ángulo  $\gamma \in [0, 2\pi)$  según el eje  $z'' = Z$  para convertir  $(u_{x''}, u_{y''})$  en  $(u_X, u_Y)$ .

Así, cualquier rotación que no fije al eje  $z$  es la composición de tres rotaciones  $R_{\gamma, z''}, R_{\beta, x'}, R_{\alpha, z}$  respecto de ejes  $z, x', z''$  y *ángulos de Euler (propios)*  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Esta es una de las 6 secuencias de ejes para descomponer la rotación en composición de tres rotaciones donde el primer y el tercer eje coincidan.

Vamos a examinar ahora el caso singular en que los ejes  $z$  y  $Z$  coincidan. Si  $u_z = u_Z$  entonces  $\beta = 0$  y solamente  $\alpha + \gamma$  está determinado en la descomposición  $R_{\gamma, z} R_{\beta, x} R_{\alpha, z}$  ( $\alpha$  y  $\gamma$  no lo están, solo su suma). Si  $u_z = -u_Z$  entonces  $\beta = \pi$  y solamente  $\alpha - \gamma$  queda determinado en  $R_{\gamma, z} R_{\beta, x} R_{\alpha, z}$ .

Este caso singular está relacionado con un problema en los sistemas de navegación conocido como **bloqueo del cardán**. Imaginemos que la orientación de un avión se obtiene mediante un sistema de navegación inercial dentro del avión basado en un mecanismo rotatorio de anillos como el de la imagen que rotan, cada uno en un eje, registrando las rotaciones del avión. Inicialmente puede haberse anclado al avión de modo que los aros queden en planos perpendiculares y de modo que el eje respecto del cual puede girar el aro morado sea el de la vertical, el eje del aro verde corresponda al eje que va de ala a ala del avión y el eje del aro azul sea el eje longitudinal del avión. Cuando se ha anclado el dispositivo el avión estaba en tierra orientado de modo que su eje longitudinal apuntaba al norte, y el eje entre alas al este. Cuando el avión rota en el aire, los aros rotan según sus ejes registrando así las rotaciones del avión. Puede medirse en todo momento lo que han rotado los aros respecto de su posición inicial para obtener tres ángulos  $(\phi, \theta, \psi)$  que permiten determinar la orientación del avión en cada momento.

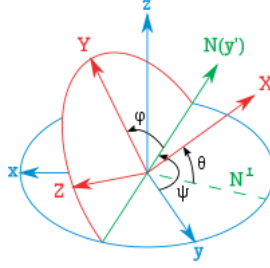




El movimiento del anillo morado se corresponde con un cambio en el ángulo de dirección del avión; el del anillo verde corresponde a un cambio en el ángulo de elevación y el del anillo azul se corresponde con un cambio en el ángulo de alabeo. Idealmente, independientemente de cómo se encuentre el avión, un giro del avión siguiendo cualquiera de estos ángulos debería ser registrado por el sistema pues este debe representar fielmente la orientación del avión. Sin embargo, observamos que cuando los anillos morado y verde están en un mismo plano (el ángulo de elevación es  $\pm\pi/2$ ), los movimientos de los anillos morado y azul registran lo mismo (se traducen en datos, reales o no, del alabeo del avión) pues los ejes de estos anillos han quedado alineados. Esto implica que hay movimientos de la nave que no están siendo registrados si se realizan a elevación constante  $\pm\pi/2$ , y que cuando la nave salga de esa situación (bloqueo del cardán) el sistema inercial cambiará abruptamente para compensar los movimientos que no habían sido registrados correctamente. El bloqueo del cardán se convirtió en un irritante problema para los astronautas de la misión Apolo XIII. También es un problema que debe tenerse en cuenta en el diseño 3D y en robótica si se usan ángulos de Euler para hacerse cargo de las rotaciones. En el caso singular asociado a los ángulos de Euler de nuestra elección hemos visto que efectivamente dos ángulos  $\alpha, \gamma$ , que en general están asociados a rotaciones diferentes, en el caso ( $\beta = 0, \pi$ ) singular contribuyen al mismo tipo de rotación.

Los ángulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ) que acabamos de describir se conocen también como ángulos de Tait-Bryan.

### 3.2. ÁNGULOS DE EULER Y DE TAIT-BRYAN. BLOQUEO DEL CARDÁN<sup>35</sup>



Aunque la definición es similar a la de los ángulos de Euler, hay una mínima diferencia en los ejes que se usan. El disco azul está en el plano  $xy$  mientras que el rojo lo está en el  $YZ$ . Asumamos un caso no singular en que estos planos son distintos. En tal caso la línea nodal en que se cortan tiene vector director  $u_N := u_z \times u_X$ . Realizando una rotación de un cierto ángulo  $\psi$  según el eje  $z$  la imagen  $u_{y'}$  del vector  $u_y$  coincide con  $u_N$ . Llamemos  $(u_{x'}, u_{y'} = u_N, u_{z'} = u_z)$  a la base resultante de aplicar la rotación. El vector  $u_{x'}$  es perpendicular a  $u_N$  por lo que está en el plano  $zX$ . Podemos hacer una rotación de ángulo  $\theta$  según el eje  $u_N$  de modo que obtenemos una nueva base  $(u_{x''} = u_X, u_{y''} = u_N, u_{z''})$ . Finalmente, podemos aplicar una rotación de ángulo  $\phi$  y eje  $u_X$  de modo que la base final obtenida es  $(u_X, u_Y, u_Z)$ . En este caso, se han usado rotaciones respecto de ejes  $z, y', x''$ , no habiendo repeticiones.

#### 3.2.1. Expresión matricial

Una rotación de ángulo  $\phi$  respecto del eje  $x$ , siguiendo la regla de la mano derecha en la dirección positiva de  $x$ , puede expresarse matricialmente mediante la matriz coordenada

$$R_{\phi,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

A las rotaciones de ángulos  $\theta, \psi$  respecto de los ejes  $y$  y  $z$  les corresponden matrices

$$R_{\theta,y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_{\psi,z} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(atención al cambio de signo en  $R_{\theta,y}$ ). Consideremos dos sistemas de referencia  $(u_x, u_y, u_z)$  y  $(u_X, u_Y, u_Z)$  donde el segundo está determinado por los ángulos de Tait-Bryan  $(\phi, \theta, \psi)$ . Lo primero que se ha hecho es una rotación

de ángulo  $\psi$  según el eje  $z$ . Las coordenadas de las imágenes de  $\{u_x, u_y, u_z\}$  son las columnas de la matriz de la rotación  $R_{\psi,z}$ . Así

$$(u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}) = (u_x, u_y, u_z) R_{\psi,z}$$

Después se ha aplicado una rotación de eje  $y'$  y ángulo  $\theta$ , así

$$(u_{x''}, u_{y''}, u_{z''}) = (u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}) R_{\theta,y'} = (u_x, u_y, u_z) R_{\psi,z} R_{\theta,y'}$$

y finalmente se ha aplicado una rotación de eje  $x''$  y ángulo  $\phi$ . Así

$$(u_X, u_Y, u_Z) = (u_{x''}, u_{y''}, u_{z''}) R_{\phi,x''} = (u_x, u_y, u_z) R_{\psi,z} R_{\theta,y'} R_{\phi,x''}$$

y los vectores  $(u_X, u_Y, u_Z)$  tienen por coordenadas las columnas de la matriz  $R_{\psi,z} R_{\theta,y'} R_{\phi,x''}$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La matriz anterior es, por tanto, la matriz de cambio de coordenadas desde la base  $\{u_X, u_Y, u_Z\}$  a la base  $\{u_x, u_y, u_z\}$ .

### 3.2.2. Cambio entre ángulos de Tait-Bryan y cuaternios

Vamos a encontrar la relación entre los ángulos de Tait-Bryan para la rotación que describe el cambio de  $(u_x, u_y, u_z)$  a  $(u_X, u_Y, u_Z)$  y el cuaternio que hace lo mismo.

El producto de matrices  $R_{\psi,z} R_{\theta,y'} R_{\phi,x''}$  podemos verlo, por la forma de las matrices, como correspondiente a la composición de tres rotaciones con respecto a los ejes, primero  $x$ , luego  $y$  y finalmente  $z$ . Esta misma secuencia de rotaciones se logra con el cuaternio resultante de la multiplicación

$$(\cos(\psi/2) + \sin(\psi/2)k)(\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)j)(\cos(\phi/2) + \sin(\phi/2)i)$$

es decir, el cuaternio  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  con

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ x_1 &= \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ x_2 &= \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ x_3 &= \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) \end{aligned}$$

Para obtener el cambio inverso comparamos las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 - 2x_2^2 - 2x_3^2 & 2x_1x_2 - 2x_0x_3 & 2x_0x_2 + 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 + 2x_0x_3 & 1 - 2x_1^2 - 2x_3^2 & -2x_0x_1 + 2x_2x_3 \\ -2x_0x_2 + 2x_1x_3 & 2x_0x_1 + 2x_2x_3 & 1 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \cos(\psi)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Claramente

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{2x_0x_1 + 2x_2x_3}{1 - 2x_1^2 - 2x_2^2} \\ \sin(\theta) &= 2x_0x_2 - 2x_1x_3 \\ \tan(\psi) &= \frac{2x_1x_2 + 2x_0x_3}{1 - 2x_2^2 - 2x_3^2} \end{aligned}$$

La presencia de denominadores indica que hay cuaternios que no tienen asociados ángulos de Tait-Bryan. Esta situación singular es debida al bloqueo del cardán. Mientras que al usar cuaternios para representar rotaciones no se presenta ese problema, con los ángulos de Euler (u otros similares) sí.

### 3.3. Interpolación de rotaciones

El uso de cuaternios no solamente permite evitar el problema del bloqueo del cardán sino que es útil también para otras operaciones con rotaciones. Podemos rotar un objeto desde su posición inicial hasta una posición final mediante una sucesión continua de rotaciones que parta de la identidad y que termine en la rotación que proporciona la posición deseada del objeto. ¿Pero cómo podemos obtener una tal sucesión de modo natural? Puesto que los cuaternios codifican rotaciones, lo natural será crear una adecuada sucesión de cuaternios, pero para ello necesitamos extender a  $\mathbb{H}$  algunas observaciones que hemos visto para  $\mathbb{C}$  en el *Grado en Matemáticas*.

#### 3.3.1. Exponencial y logaritmo de cuaternios

**Lema 3.3.1.** *Sea  $x$  una indeterminada. Las series formales*

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \ln(1+x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

*verifican*

$$e^{\ln(1+x)} = 1+x, \quad \ln(e^x) = x.$$



*Demostración.* Derivamos, formalmente, la serie  $s(x) := e^{\ln(1+x)}$ . Obtenemos

$$s'(x) = \frac{e^{\ln(1+x)}}{1+x} = \frac{s(x)}{1+x}$$

por lo que  $(1+x)s'(x) = s(x)$ . Por tanto, los coeficientes  $s_k$  de  $x^k$  en  $s(x)$  cumplen  $s_k = (k+1)s_{k+1} + ks_k$ . Claramente  $s_0 = 1$ , así que  $s_1 = 1$ , y  $s_2 = 0$ . Pero esto implica que  $s_k = 0$  si  $k \geq 3$ . Por tanto  $s(x) = 1+x$ .

Del mismo modo, si ahora  $s(x) := \ln(e^x)$ ,  $s'(x) = e^x/e^x = 1$  y  $s(x)$  tiene término constante 0. Así  $s(x) = x$ .  $\square$

También es sencillo comprobar que si  $x$  e  $y$  son indeterminadas que conmutan (y asocian entre sí) entonces

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad (e^x)^{-1} = e^{-x}.$$

La serie exponencial puede evaluarse en cualquier cuaternio ya que  $\mathbb{H}$  posee un producto asociativo y además la serie resultante es convergente. De hecho, dado un cuaternio  $x \in \mathbb{H}$ , la exponencial de  $x$  se define como

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Esta serie converge ya que la norma del término general es  $n(x)^k/k!$ . Más aún, escribiendo  $x = \lambda + z$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  y algún  $z \in \mathbb{H}_0$  tenemos

$$e^x = e^\lambda e^z$$

y, si  $z \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left( \sqrt{n(z)} \right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left( \sqrt{n(z)} \right)^{2k+1} \frac{z}{\sqrt{n(z)}} \\ &= \cos \left( \sqrt{n(z)} \right) + \sin \left( \sqrt{n(z)} \right) \frac{z}{\sqrt{n(z)}} \end{aligned}$$

que es lo natural ya que  $\mathbb{R}1 + \mathbb{R}z$  se puede ver como una copia de  $\mathbb{C}$  si identificamos la unidad imaginaria  $i$  con el cuaternio  $z/\sqrt{n(z)}$  de norma 1. Con esta identificación, la anterior fórmula coincide con la fórmula usual  $e^{\theta i} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$  en  $\mathbb{C}$ . La diferencia al trabajar en  $\mathbb{H}$  es que hay muchas posibles unidades imaginarias –cualquier elemento de norma 1 y traza 0 lo es. Conviene notar que la anterior fórmula para la exponencial prueba que

$$e^x \text{ tiene norma 1 si y solamente si } x \in \mathbb{H}_0.$$

También nos da una *expresión polar* para cuaternios no reales. Dado  $x \in \mathbb{H}$ ,  $x \notin \mathbb{R}1$ , existen únicos  $\rho > 0$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$  y  $u \in \mathbb{H}_0$  con  $n(u) = 1$  tales que

$$x = \rho e^{\alpha u}.$$

puesto que  $\rho$  es necesariamente  $\sqrt{n(x)}$  mientras que  $\alpha$  y  $u$  provienen de la representación de  $x/\sqrt{n(x)}$ . Si el cuaternio  $x$  fuese real no nulo el vector  $u$  no quedaría determinado.

La serie

$$\ln(1+x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

converge para valores de  $1+x$  en un entorno suficientemente pequeño de  $1 \in \mathbb{H}$ . Si además  $n(1+x) = 1$  entonces, como  $1+x = e^{\ln(1+x)}$ ,  $\ln(1+x)$  debe pertenecer necesariamente a  $\mathbb{H}_0$ .

### 3.3.2. Interpolación entre dos cuaternios de norma 1

Dado un cuaternio  $x \neq \pm 1$  con  $n(x) = 1$ ,  $x = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)u = e^{\alpha u}$ ,  $u \in \mathbb{H}_0$ ,  $n(u) = 1$ ,  $\sin(\alpha) > 0$  y  $t \geq 0$  también podemos definir

$$x^t := \cos(t\alpha) + \sin(t\alpha)u = e^{t\alpha u}.$$

Esta fórmula se extiende de modo natural al caso en que  $x = 1$  mediante  $1^t = 1$ .

Dados dos cuaternios  $x, y$  de norma 1,  $x \neq -y$ , como  $x^{-1}y \neq -1$  es un cuaternio de norma 1, podemos definir la curva diferenciable

$$\boxed{\gamma_x^y(t) := x(x^{-1}y)^t}$$

Claramente

$$\gamma_x^y(0) = x, \quad \gamma_x^y(1) = y, \quad n(\gamma_x^y(t)) = 1 \quad (t \in [0, 1])$$

Es interesante el calcular el vector tangente a esta curva. Para ello escribimos  $x^{-1}y = e^{\alpha u}$ . Así

$$\gamma_x^y(t)' = x(e^{t\alpha u})' = x e^{t\alpha u}(\alpha u) = \gamma_x^y(t)\alpha u$$

lo que nos dice algo muy interesante, y es que la norma del vector tangente es constante ya que

$$\sqrt{n(\gamma_x^y(t)')} = \alpha.$$

En otras palabras, el cambio desde el cuaternio  $x$  hasta el cuaternio  $y$  se produce a velocidad constante, lo que hace que la curva desde la rotación codificada por  $x$  hasta la rotación codificada por  $y$  tenga velocidad (realmente la norma del vector velocidad) constante.

**Ejemplo 3.3.1.** *Vamos a calcular un camino que nos lleve desde el cuaternio  $i$  hasta el cuaternio  $j$ . Siguiendo el argumento anterior*

$$\begin{aligned}\gamma_i^j(t) &= i(i^{-1}j)^t = i(-k)^t = i(\cos(t\pi/2) + \sin(t\pi/2)(-k)) \\ &= \cos(t\pi/2)i + \sin(t\pi/2)j\end{aligned}$$

*El vector tangente es*

$$\gamma_i^j(t)' = -\frac{\pi}{2} \sin(t\pi/2)i + \frac{\pi}{2} \cos(t\pi/2)j$$

*cuya norma es  $\pi/2$ . Como puede verse, esta ruta corresponde a seguir una circunferencia maximal en el plano generado por los vectores  $i, j$ .*

Al describir los ángulos de Euler vimos que si el cardán se bloquea entonces al salir de esa posición el sistema inercial puede tener que adecuarse muy rápidamente a la nueva posición. Esto se traduce en que cuando la curva de rotaciones que parte de la correspondiente a una base ortonormada para llegar a otra pasa por la posición en la que el cardán se bloquea al salir de esa posición la velocidad de la curva puede ser increíblemente alta, lo que, sin supervisión humana, podría traducirse en aceleraciones muy peligrosas. La representación de las rotaciones mediante cuaternios no presentan ese problema.

### 3.3.3. Eficiencia

Es interesante hacer notar que la composición de dos rotaciones usando el producto de sus matrices coordenadas involucra

$$3 \times 3 \times 2 = 18 \text{ sumas y } 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ productos}$$

Sin embargo, la composición de rotaciones usando el producto de cuaternios involucra

$$4 \times 3 = 12 \text{ sumas y } 4 \times 4 = 16 \text{ productos.}$$

Así, el uso de cuaternios para parametrizar rotaciones es más eficiente cuando se van a realizar muchas composiciones. Al contrario, para calcular la imagen de un vector por una rotación, el producto por la matriz coordenada involucra

$$3 \times 2 = 6 \text{ sumas y } 3 \times 3 = 9 \text{ productos}$$

pero el uso de cuaternios involucra, a partir de la definición, dos productos de cuaternios, lo que equivale a

$$2 \times 4 \times 3 = 24 \text{ sumas y } 2 \times 4 \times 4 = 32 \text{ productos.}$$

Así, en este caso habría que buscar otros métodos más eficientes para calcular rotaciones usando cuaternios.

## 3.4. Generalización a dimensiones superiores.

### 3.4.1. Álgebras de Clifford

Como hemos visto, ya Hamilton observó que para construir su sistema numérico debía partir de dimensión 4 en lugar de hacerlo desde dimensión 3. Es decir, tenía que duplicar los números complejos. Parecería natural pensar que el siguiente candidato para describir rotaciones en espacios de dimensiones superiores son los octoniones. Sin embargo, como hemos visto, esta álgebra no es asociativa, lo que, lejos de ayudar, complica sobremanera las fórmulas. Así pues, era necesaria otra estructura.

Dado un espacio vectorial euclídeo  $(V, n)$  de dimensión  $d$ , buscamos un álgebra asociativa unitaria  $A$  cuyo producto, al igual que el de los cuaternios, permita describir de modo sencillo las rotaciones. Dentro del álgebra  $A$  que buscamos debería haber una *parte escalar*  $\mathbb{R}1$  y otra *parte vectorial* que contenga al espacio  $(V, n)$  del que se desea representar las rotaciones. Así,

$$A \text{ es un álgebra asociativa y } 1 \text{ es su elemento identidad.} \quad (3.2)$$

Como hemos dicho, debería existir un homomorfismo inyectivo de espacios vectoriales

$$\iota: V \rightarrow A, \quad v \mapsto v \quad (3.3)$$

y para seguir fiel a la idea presente en los cuaternios de que los elementos de  $V$  deben comportarse, salvo múltiplo escalar, como unidades imaginarias, deberíamos imponer también

$$v^2 = -n(v)1 \quad \forall v \in V = \iota(V) \subseteq A \quad (3.4)$$

Estas sencillas condiciones tienen consecuencias muy importantes.

**Lema 3.4.1.** *Sea  $(A, \iota)$  un par que satisface las propiedades (3.2), (3.3) y (1.3). Se tiene que*

$$uv + vu = -f(u, v)1, \quad \forall_{u, v \in V}$$

*Demostración.* Desarrollando la igualdad  $(u + v)^2 = -n(u + v)1$  tenemos  $u^2 + v^2 + uv + vu = -n(u + v)1$ . Como  $u^2 = -n(u)1$  y  $v^2 = -n(v)1$  despejamos  $uv + vu = (n(u) + n(v) - n(u + v))1 = -f(u, v)1$  y obtenemos el resultado.  $\square$

Así, en caso de que  $\{e_1, \dots, e_d\}$  sea una base ortonormada tenemos las conocidas relaciones

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \text{ si } i \neq j.$$

El álgebra  $A$  podría ser muy grande y contener muchos elementos que nada tengan que ver con  $V$ , así que una última condición natural para controlar el tamaño sería

$$A = \mathbb{R}1 + \sum_{k \geq 1} \underbrace{V \cdots V}_{k \text{ factores}} \quad (3.5)$$

ya que el subespacio de la derecha es la menor subálgebra unitaria de  $A$  que contiene a  $V$ . Además esta subálgebra cumple las condiciones que hemos impuesto hasta ahora.

**Lema 3.4.2.** *Sea  $(A, \iota)$  un par que cumple las propiedades (3.2), (3.3), (1.3) y (3.5). Sea  $\{e_1, \dots, e_d\}$  una base ortonormada de  $V$ . Se tiene que todo elemento de  $A$  es una combinación lineal de productos del tipo  $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$  con  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq d$  y  $k \geq 0$ .*

*Demostración.* La condición (3.5) implica que cualquier elemento de  $A$  es combinación lineal de elementos  $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$  con  $k \geq 0$ . Ahora bien, como  $e_i^2 = -1$ , podemos asumir que cualesquiera dos factores consecutivos son distintos. Usando que  $e_i e_j = -e_j e_i$  si  $i \neq j$  los podemos reordenar salvo cambio de signo. Esto prueba el lema.  $\square$

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $(V, n(\cdot))$  un espacio vectorial euclídeo de dimensión  $d$ . Existe un álgebra  $\text{Cl}(V)$  de dimensión  $2^d$ , llamada álgebra de Clifford de  $(V, -n(\cdot))$ , y una aplicación lineal inyectiva  $\iota: V \rightarrow \text{Cl}(V)$ ,  $v \mapsto v$ , de modo que el par  $(\text{Cl}(V), \iota)$  cumple las propiedades (3.2), (3.3), (1.3) y (3.5). Además  $\text{Cl}(V)$  admite un automorfismo  $\theta$  de orden  $\leq 2$  y una involución  $x \mapsto x^*$  determinados por  $\theta(v) = -v$  y  $v^* = v$  si  $v \in V$ .*

*Demostración.* Procedemos por inducción en la dimensión  $d$  de  $V$ . Si  $d = 0$  entonces  $\text{Cl}(V) = \mathbb{R}1$  y la aplicación nula  $\iota: V = \{0\} \rightarrow \text{Cl}(V)$  sirve. Aquí el automorfismo y la involución coinciden con la aplicación identidad.

Supuesto demostrado hasta  $d - 1$  consideramos  $V = W \perp \mathbb{R}e_d$ . Así, existe el álgebra de Clifford  $(\text{Cl}(W), \iota)$ . Formamos  $\text{Cl}(V) = \text{Cl}(W) \oplus \text{Cl}(W)e_d$  como

una duplicación de  $\text{Cl}(W)$ , similar al proceso de Cayley-Dickson, de acuerdo a

$$(x + ye_d)(x' + y'e_d) = (xx' - y\theta(y')) + (xy' + y\theta(x'))e_d.$$

Los nuevo automorfismo y antiautomorfismo son

$$\begin{aligned}\theta(x + ye_d) &:= \theta(x) - \theta(y)e_d \\ (x + ye_d)^* &:= x^* + \theta(y^*)e_d.\end{aligned}$$

Comprobemos por ejemplo la asociatividad del nuevo producto.

$$\begin{aligned}((x + ye_d)(x' + y'e_d))(x'' + y''e_d) &= ((xx' - y\theta(y')) + (xy' + y\theta(x'))e_d)(x'' + y''e_d) \\ &= (xx'x'' - y\theta(y')x'' - xy'\theta(y'') - y\theta(x')\theta(y'')) \\ &\quad + (xx'y'' - y\theta(y')y'' + xy'\theta(x'') + y\theta(x')\theta(x''))e_d \\ (x + ye_d)(x' + y'e_d)(x'' + y''e_d) &= (x + ye_d)((x'x'' - y'\theta(y'')) + (x'y'' + y'\theta(x''))e_d) \\ &= xx'x'' - xy'\theta(y'') - y\theta(x')\theta(y'') - y\theta(y')x'' \\ &\quad + (xx'y'' + xy'\theta(x'') + y\theta(x')\theta(x'') - y\theta(y')y'')e_d.\end{aligned}$$

El resto de propiedades se siguen de igual modo.  $\square$

**Corolario 3.4.1.** Sea  $\{e_1, \dots, e_d\}$  una base ortonormada de  $V$ . El conjunto

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k, k \geq 0\}$$

es una base de  $\text{Cl}(V)$ .

*Demostración.* Hemos visto que tal conjunto genera linealmente a  $\text{Cl}(V)$ . Puesto que tiene  $2^d$  elementos y la dimensión de  $\text{Cl}(V)$  es  $2^d$  entonces debe ser una base.  $\square$

### 3.4.2. Reflexiones y rotaciones mediante álgebras de Clifford

El álgebra de Clifford tiene un fuerte carácter geométrico y es muy utilizada por ejemplo en Física.

**Proposición 3.4.1.** Sean  $u \in V$  con  $n(u) = 1$ . En  $\text{Cl}(V)$  se tiene que la aplicación  $\sigma_u: V \rightarrow V$  dada por

$$v \mapsto uvu = -f(u, v)u + v$$

coincide con la reflexión respecto del hiperplano perpendicular de  $V$  a  $u$ .

*Demostración.* Claramente

$$uvu = u(vu) = u(-f(u, v) - uv) = -f(u, v)u + n(u)v = -f(u, v)u + v$$

lo que corresponde a la reflexión respecto del hiperplano de  $V$  perpendicular a  $u$ .  $\square$

El conocido Teorema de Cartan-Dieudonné permite construir  $O(V)$  a partir de  $Cl(V)$ .

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $(V, n)$  un espacio euclídeo de dimensión  $d \geq 1$ . Cualquier isometría de  $V$  es composición de a lo sumo  $d$  reflexiones, excepto si  $d = 1$  ya que en tal caso la identidad es composición de 2 reflexiones.*

*Demostración.* Procedemos por inducción en  $d$ . Si  $d = 1$  las únicas isometrías son  $\pm \text{Id}$  y el resultado es obvio. El caso  $d = 2$  es también sencillo. Sea  $d \geq 3$  y  $\sigma: V \rightarrow V$  una isometría. Distinguimos dos casos.

*Caso 1.* Aquí asumimos que  $\sigma$  posee un vector propio de valor propio 1. En tal caso sea  $0 \neq v$  un tal vector. Descomponemos  $V = H \perp \mathbb{R}v$ . Como  $\sigma$  es isometría y  $\sigma(v) = v$  entonces para todo  $u \in H$  se tiene que  $0 = f(u, v) = f(\sigma(u), \sigma(v)) = f(\sigma(u), v)$ . Así,  $\sigma(H) = H$  y  $\sigma$  se puede restringir a un endomorfismo  $\sigma|_H$  de  $H$ . Si vemos  $H$  como un espacio euclídeo en sí mismo,  $\sigma|_H$  es una isometría de  $H$ . Así, por la hipótesis de inducción  $\sigma|_H = \sigma_1 \cdots \sigma_k$  donde  $\sigma_i$  son reflexiones de  $H$  respecto de hiperplanos y  $k \leq d - 1$ . Cada  $\sigma_i$  la podemos extender a una reflexión  $\bar{\sigma}_i$  de  $V$  sin más que imponer  $\sigma_i(v) = v$ . Así, para elementos  $u \in H$ ,  $\sigma(u) = \sigma|_H(u) = \sigma_1 \cdots \sigma_k(u) = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_k(u)$  y para  $v$  también  $\sigma(v) = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_k(v)$ . Esto muestra que  $\sigma = \bar{\sigma}_1 \cdots \bar{\sigma}_k$  con  $k \leq d - 1$  en este caso.

*Caso 2.* Aquí asumimos que  $\sigma$  no posee vectores propios de valor propio 1. Sea  $0 \neq v \in V$ . Vamos a considerar la reflexión  $\sigma_1$  respecto del hiperplano  $H$  perpendicular a  $v - \sigma(v)$ . Como  $n(v) = n(\sigma(v))$  entonces  $f(v - \sigma(v), v + \sigma(v)) = f(v, v) - f(\sigma(v), \sigma(v)) = n(v) - n(\sigma(v)) = 0$ . Así  $v + \sigma(v) \in H$  y por tanto

$$\begin{aligned} \sigma_1(v) &= \sigma_1\left(\frac{1}{2}(v - \sigma(v)) + \frac{1}{2}(v + \sigma(v))\right) \\ &= -\frac{1}{2}(v - \sigma(v)) + \frac{1}{2}(v + \sigma(v)) = \sigma(v). \end{aligned}$$

y como  $\sigma_1^2 = \text{Id}$ , entonces  $\sigma_1\sigma(v) = v$ . Así  $\sigma_1\sigma$  es una isometría que sí que tiene un vector propio de valor propio 1. Por el apartado anterior es composición de a lo sumo  $d - 1$  reflexiones  $\sigma_1\sigma = \sigma_2 \cdots \sigma_d$ . Despejando  $\sigma$  obtenemos que  $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_d$ .  $\square$

Puesto que cualquier reflexión respecto de un hiperplano de  $V$  se obtiene a partir del producto en  $Cl(V)$ , podemos obtener también cualquier isometría.

### 3.4.3. Grupos Pin y Spin

Consideramos el grupo multiplicativo

$$\text{Pin}(V) = \{u_1 \dots u_k \in \text{Cl}(V) \mid u_i \in V, n(u_i) = 1, i = 1, \dots, k, \text{ y } k \geq 0\}$$

y el subgrupo

$$\text{Spin}(V) = \{x \in \text{Pin}(V) \mid \theta(x) = x\}.$$

**Proposición 3.4.2.** *La aplicación  $\rho: \text{Pin}(V) \rightarrow \text{O}(V)$ ,  $x \mapsto \rho_x$  dada por*

$$\rho_x(v) = vxv^*$$

*es un homomorfismo suprayectivo de grupos.*

*Demostración.* Veamos que  $\rho$  realmente define un endomorfismo de  $V$ . Si  $x = u_1 \dots u_k \in \text{Pin}(V)$ ,

$$\rho_x(v) = vxv^* = u_1 \dots u_k x (u_1 \dots u_k)^* = u_1 \dots u_k v u_k \dots u_1 = \sigma_{u_1} \dots \sigma_{u_k}(v).$$

por lo que efectivamente  $\rho_x$  es un endomorfismo de  $V$ . De hecho es una composición de reflexiones, así que es un elemento de  $\text{O}(V)$ . La suprayectividad es consecuencia del teorema de Cartan-Dieudonné.

Que  $\rho$  es un homomorfismo de grupos es obvio una vez que hemos visto que  $\rho_{u_1 \dots u_k} = \sigma_{u_1} \dots \sigma_{u_k}$  ya que si  $x = u_1 \dots u_k$  e  $y = v_1 \dots v_l$  entonces  $\rho_{xy} = \sigma_{u_1} \dots \sigma_{u_k} \sigma_{v_1} \dots \sigma_{v_l} = \rho_x \rho_y$ .  $\square$

**Corolario 3.4.2.** *La restricción de  $\rho$  a  $\text{Spin}(V)$  proporciona un epimorfismo de grupos  $\rho: \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$ .*

*Demostración.* Observamos que para que un elemento  $x = u_1 \dots u_k \in \text{Pin}(V)$  pertenezca a  $\text{Spin}(V)$  es necesario y suficiente que  $x = \theta(x) = \theta(u_1) \dots \theta(u_k) = (-1)^k u_1 \dots u_k = (-1)^k x$ ; es decir que  $k$  sea par. Como  $\rho_x = \sigma_{u_1} \dots \sigma_{u_k}$ , el que  $\rho_x$  pertenezca a  $\text{O}(V)$  es equivalente a que  $k$  sea par. Así pues, si  $x \in \text{Spin}(V)$  entonces  $\rho_x \in \text{SO}(V)$  y si  $\rho_x \in \text{SO}(V)$  entonces  $x \in \text{Spin}(V)$ . Esto prueba que la restricción de  $\rho$  a  $\text{Spin}(V)$  efectivamente toma imágenes en  $\text{SO}(V)$  y que de hecho es suprayectiva.  $\square$

Al igual que para cuaternios, un elemento y su opuesto dentro de  $\text{Pin}(V)$  determinan la misma isometría. De hecho,

**Proposición 3.4.3.**  $\ker \rho = \{\pm 1\}$ .



*Demostración.* Sea  $x = u_1 \cdots u_k \in \ker \rho$ . Tenemos que  $xvx^* = v$  para todo  $v \in V$ . Es decir, multiplicando por  $u_1, u_2, \dots, u_k$  a derecha y usando que  $u_i^2 = -n(u_i) = -1$ ,  $xv = (-1)^k vx = v\theta(x)$ .

Si  $v = u_k$  obtenemos que  $-u_1 \cdots u_{k-1} = (-1)^k u_k u_1 \cdots u_k$ . Multiplicando por  $u_k$ , esto nos da  $u_1 \cdots u_k = (-1)^k u_k u_1 \cdots u_{k-1}$ . Por tanto  $u_k u_1 \cdots u_{k-1}$  cumple lo mismo que  $x$ . Así,  $x = (-1)^k u_k u_1 \cdots u_{k-1} = \cdots = (-1)^{k^2} x$ . Si  $k$  es impar esto implica que  $x = 0$ , lo que no es posible. Así  $k$  debe ser par y, por lo tanto,  $x$  conmuta con todos los elementos de  $\text{Cl}(V)$  pues lo hace con los de  $V$ .

Consideramos ahora una base ortonormada  $\{e_1, \dots, e_d\}$  de  $V$  y una base de  $\text{Cl}(V)$  como la del corolario (3.4.1). Escribimos  $x$  en términos de esa base. Podemos agrupar los términos donde aparezca  $e_1$  y donde no aparezca y escribir  $x = x_0 + e_1 x_1$  donde  $x_0, x_1$  son combinaciones lineales de productos de elementos de  $\{e_2, \dots, e_d\}$  ordenados en orden creciente. Además como  $k$  es par,  $\theta(x) = x$  y así  $x_0 + e_1 x_1 = x = \theta(x) = \theta(x_0) + \theta(e_1)\theta(x_1) = \theta(x_0) - e_1\theta(x_1)$  implica  $\theta(x_0) = x_0$  y  $\theta(x_1) = -x_1$ . Más aún, como tenemos que  $e_1 x = x e_1$  entonces  $e_1 x_0 - x_1 = x_0 e_1 + e_1 x_1 e_1 = e_1 \theta(x_0) - \theta(x_1) = e_1 x_0 + x_1$ . Comparando el lado izquierdo de la cadena de igualdades y el lado derecho vemos que  $x_1 = 0$ . Por tanto  $x = x_0$  y al escribir  $x$  en términos de la base del corolario (3.4.1) no aparece  $e_1$ . Ahora que sabemos que  $x = x_0$  repetimos el argumento usando  $e_2$  y obtenemos que tampoco  $e_2$  aparece. Reiterando llegamos a que no aparece ningún  $e_i$ . Por tanto  $x = \lambda 1$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puesto que  $n(x) = 1$ ,  $\lambda = \pm 1$ .  $\square$

#### 3.4.4. Cuaternios como caso particular de rotaciones mediante Spin

Ahora que hemos visto que el álgebra de Clifford proporciona una herramienta algebraica para operar de modo sencillo con  $\text{O}(V)$  es interesante comparar la aproximación a las rotaciones de  $\mathbb{R}^3$  mediante cuaternios y mediante  $\text{Cl}(\mathbb{R}^3)$ .

Consideremos un espacio euclídeo  $V$  de dimensión 3 con base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . El álgebra de Clifford  $\text{Cl}(V)$  tiene dimensión  $2^3 = 8$ . Por el corolario 3.4.1, una base de  $\text{Cl}(V)$  es

$$1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3, e_1 e_2 e_3$$

La primera observación importante, aunque obvia, es que los elementos del grupo  $\text{Spin}(V)$  involucran productos pares de elementos de  $V$ , por lo que en realidad son combinaciones lineales de  $\{1, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3\}$ .

Definimos

$$i := e_1 e_2, \quad j := e_1 e_3, \quad k := e_2 e_3.$$

Observamos que en  $\text{Cl}(v)$

$$\begin{aligned} ij &= (e_1 e_2)(e_1 e_3) = e_1(e_2 e_1)e_3 = -e_1 e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3 = k = -ji \\ jk &= (e_1 e_3)(e_2 e_3) = e_1 e_2 = i = -kj \\ ki &= (e_2 e_3)(e_1 e_2) = j = -ik \end{aligned}$$

por lo que  $\mathbb{R}1 + \mathbb{R}e_1 e_2 + \mathbb{R}e_1 e_3 + \mathbb{R}e_2 e_3$  es en realidad una subálgebra de  $\text{Cl}(V)$  que es isomorfa a los cuaternios  $\mathbb{H}$  y en la que vive el grupo  $\text{Spin}(V)$ .

Primero vamos a ver qué rotación  $\rho_x$  es la asociada a un elemento  $x = x_0 + x_1 e_1 e_2 + x_2 e_1 e_3 + x_3 e_2 e_3 \in \text{Spin}(V)$ . La matriz coordenada de  $\rho_x$  en la base

$$\{e_3, -e_2, e_1\}$$

(aquí el orden de la base es my importante para poder comparar  $\rho_x$  con la rotación asociada a  $x$  como cuaternio) se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} x e_3 x^* &= (x_0 + x_1 e_1 e_2 + x_2 e_1 e_3 + x_3 e_2 e_3) e_3 (x_0 - x_1 e_1 e_2 - x_2 e_1 e_3 - x_3 e_2 e_3) \\ &= (x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) e_3 + (2x_0 x_3 + 2x_1 x_2)(-e_2) \\ &\quad + (2x_1 x_3 - 2x_0 x_2) e_1 \\ x(-e_2) x^* &= (-2x_0 x_3 + 2x_1 x_2) e_3 + (x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(-e_2) \\ &\quad + (2x_0 x_1 + 2x_2 x_3) e_1 \\ x e_1 x^* &= (2x_0 x_2 + 2x_1 x_3) e_3 + (-2x_0 x_1 + 2x_2 x_3)(-e_2) \\ &\quad + (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) e_1 \end{aligned}$$

Así, la matriz coordenada de  $\rho_x$  es

$$\begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1 x_2 - 2x_0 x_3 & 2x_0 x_2 + 2x_1 x_3 \\ 2x_1 x_2 + 2x_0 x_3 & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & -2x_0 x_1 + 2x_2 x_3 \\ -2x_0 x_2 + 2x_1 x_3 & 2x_0 x_1 + 2x_2 x_3 & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

El determinante de esta matriz es

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3.$$

pero como el determinante de una rotación es 1, entonces para  $x \in \text{Spin}(V)$  debemos tener que  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Es decir, visto  $x = x_0 + x_1 e_1 e_2 + x_2 e_1 e_3 + x_3 e_2 e_3 \in \text{Spin}(V)$  como cuaternio en  $\mathbb{H} := \mathbb{R}1 + \mathbb{R}e_1 e_2 + \mathbb{R}e_1 e_3 + \mathbb{R}e_2 e_3$ ,  $x$  es un cuaternio de norma 1. Además, comparando la matriz coordenada (3.1) de  $\text{Ad}_x$  con la matriz coordenada (3.6) de  $\rho_x$  vemos que la rotación  $\rho_x$  coincide con la rotación que induce  $x$  como cuaternio.



## Capítulo 4

### Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos conocido cómo surgieron los cuaternios y sus propiedades. A pesar de que el desarrollo del cálculo vectorial, posterior a los cuaternios, parecía que había dejado de lado a los mismos en el estudio del espacio  $n$ -dimensional, hemos podido observar como el álgebra de los cuaternios posee muchas ventajas al trabajar en el espacio tridimensional. Los cuaternios son una alternativa a los Ángulos de Euler en el estudio de las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  ya que además nos evitan problemas como por ejemplo el bloqueo de cardán.

En la actualidad, y desde hace años, el uso de los cuaternios no para de crecer en ámbitos científico-tecnológicos como la robótica, la aeronáutica, los videojuegos, etc. Por ello, he llegado a la conclusión de que a pesar de los avances tecnológicos que logramos a medida que pasa el tiempo, muchas veces los métodos antiguos son más eficientes a la hora de trabajar y no debemos olvidarnos de ellos.



# Bibliografía

- [1] W. R. Hamilton: *Lectures on Quaternions*. Dublin: Hodges and Smith, 1853.
- [2] A. J. Hanson: *Visualizing quaternions*. Series in Interactive 3D Technology, Morgan Kaufmann Publishers (Elsevier), 2006.
- [3] J. B. Kuipers: *Quaternions and rotation sequences*. Princeton University Press, 1999.
- [4] K. A. Zhevlakov, A. M. Slink'o, I. P. Shestakov y A. I. Shirshov: *Rings that are nearly associative*. Academic Press, New York, 1982.